MAT

Serie A

Conferencias, Seminarios y Trabajos de Matemática.

ISSN:1515-4904

19

VII Italian Latin American Conference on Indutrial and Applied Mathematics

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

Departamento de Matemática,
Rosario,
Argentina

Octubre 2014

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 19

VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

Rosario, Octubre 2014

MAT - Serie A, 19 (2014), 27-34

Sobre el Espectro de Fucik para un Sistema Acoplado

Santiago C. Rojas Romero[♭]

[♭]*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú,*
scrr.cesar@gmail.com, srojasr@unmsm.edu.pe, www.unmsm.edu.pe

Resumen: En este trabajo estudiamos el Espectro de Fucik para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}\,, \end{cases}$$

donde $u^+ = max\{u,0\}$, $u^- = max\{-u,0\}$ y $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann.

Palabras clave: *Sistema acoplado, Espectro de Fucik, Superficies de Fucik.*
2000 AMS Subject Classification: 34A34,34B07.

1. Introducción

Diversos trabajos de investigación sobre oscilaciones de puentes colgantes ([6], [9]), movimientos de barcos ([7]) y soluciones estacionarias para la ecuación de competencia entre especies ([2]), muestran en su desarrollo la importancia de conocer el espectro de Fucik para el problema correspondiente.

La noción de espectro de Fucik fue introducida en los trabajos de Fucik [4] para el problema de Laplace escalar. Este espectro es definido como el conjunto Σ de puntos $(\lambda^+, \lambda^-) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ u^+ - \lambda^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = 0 & \text{en } \{0,1\}\,, \end{cases} \tag{1}$$

tiene soluciones no triviales. Actualmente, Σ está completamente descrito e inclusive se conoce explícitamente las curvas que lo forman, ver por ejemplo [3], [5] y [10].

En este trabajo seguimos las ideas de Campos y Dancer [1] para estudiar el espectro de Fucik para el problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ Bu = Bv = 0 & \text{en } \{0,1\}\,, \end{cases} \tag{2}$$

donde $Bu = 0$ representa las condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann. Este espectro es definido como el conjunto $\widehat{\Sigma}$ de puntos $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0$, para los cuales el problema (2) tiene soluciones no triviales.

En el desarrollo del trabajo obtenemos que $\widehat{\Sigma}$ contiene superficies no acotadas en $\mathbb{R}^3$. En la sección 2 presentamos la forma explícita de estas superficies para el caso en que las correspondientes soluciones no triviales de (2) no cambian de signo, y en la sección 3 mostramos algunas propiedades de las superficies correspondientes a soluciones no triviales de (2) que sí cambian de signo.

2. Propiedades del espectro del sistema acoplado y de las correspondientes soluciones no triviales

Denotamos $\widehat{\Sigma}_t$ la parte trivial del espectro de Fucik del sistema acoplado (2)

$$\widehat{\Sigma}_t = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \lambda^\pm, \mu^- \geq 0 \quad \text{y (2) tiene soluciones no triviales que no cambian de signo}\,\}$$

y $\widehat{\Sigma}_{nt}$ la parte no trivial

$$\widehat{\Sigma}_{nt} = \{ (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \lambda^{\pm}, \mu^- > 0 \quad \text{y (2) tiene soluciones no triviales que cambian de signo} \} \,,$$

con lo cual $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_t \,\cup\, \widehat{\Sigma}_{nt}$. Y tenemos las siguientes propiedades

Lema 1 *($\widehat{\Sigma} \neq \emptyset$) $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$, $\forall\ k \geq 1$, donde λ_k es autovalor de $-u''$ con condiciones de frontera B.*

Lema 2 *(Simetrías en $\widehat{\Sigma}$) Si $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con las correspondientes soluciones no triviales (u, v) de (2), entonces*

1. *$(\lambda^+, \mu^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con correspondientes soluciones no triviales (v, u).*
2. *$\left(\sqrt{\lambda^-\mu^-}\,,\ \lambda^+\sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}\,,\ \lambda^+\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}\ \right) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ con correspondientes soluciones no triviales $\left(-u, -\sqrt{\frac{\lambda^-}{\mu^-}}v\ \right)$.*

Nota 1 *Combinando las dos propiedades de simetría, tenemos que si $\lambda^+ = \sqrt{\lambda^-\,\mu^-}$, entonces para el mismo punto $(\sqrt{\lambda^-\,\mu^-}, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ hay dos soluciones de (2), digamos (u, v) y $\left(-v, -\sqrt{\frac{\mu^-}{\lambda^-}}\,u\right)$.*

2.1. Identidades importantes

Aquí hacemos una adaptación de los cálculos presentados en [8]. Empezamos multiplicando la primera ecuación de (2) por v, la segunda por u e integrando de 0 a 1, para obtener

$$\int_0^1 u'v'dt = \lambda^+\int_0^1 (v^+)^2 + \lambda^-\int_0^1 (v^-)^2 dt = \lambda^+\int_0^1 (u^+)^2 + \mu^-\int_0^1 (u^-)^2 dt\,. \tag{3}$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación de (2) por u, la segunda por v e integrando de 0 a 1, tenemos

$$\int_0^1 (u')^2\,dt \;=\; \lambda^+\int_0^1 (v^+)u\,dt - \lambda^-\int_0^1 (v^-)u\,dt \quad \text{y} \tag{4}$$

$$\int_0^1 (v')^2\,dt \;=\; \lambda^+\int_0^1 (u^+)v\,dt - \mu^-\int_0^1 (u^-)\,v dt\,. \tag{5}$$

Mientras que usando solo la parte positiva y negativa de u y v obtenemos

$$\int_0^1 |(u^+)'|^2\,dt \;=\; \lambda^+\int_0^1 (v^+)(u^+)\,dt - \lambda^-\int_0^1 (v^-)(u^+)\,dt\,, \tag{6}$$

$$\int_0^1 |(u^-)'|^2\,dt \;=\; -\lambda^+\int_0^1 (v^+)(u^-)\,dt + \lambda^-\int_0^1 (v^-)(u^-)\,dt\,, \tag{7}$$

$$\int_0^1 |(v^+)'|^2\,dt \;=\; \lambda^+\int_0^1 (u^+)(v^+)\,dt - \mu^-\int_0^1 (u^-)(v^+)\,dt \quad \text{y} \tag{8}$$

$$\int_0^1 |(v^-)'|^2\,dt \;=\; -\lambda^+\int_0^1 (u^+)(v^-)\,dt + \mu^-\int_0^1 (u^-)(v^-)\,dt\,. \tag{9}$$

De otro lado, para el problema tipo Newmann, como $\phi_1 = k \neq 0$, obtenemos

$$\lambda^+\int_0^1 v^+\,dt = \lambda^-\int_0^1 v^-\,dt \qquad \text{y} \qquad \lambda^+\int_0^1 u^+\,dt = \mu^-\int_0^1 u^-\,dt\,. \tag{10}$$

Y para el problema tipo Dirichlet llegamos a

$$\begin{aligned}(\lambda^+ - \lambda_1)\int_0^1 v^+\phi_1\,dt + (\lambda^+ - \lambda_1)\int_0^1 u^+\phi_1\,dt \\ = (\lambda^- - \lambda_1)\int_0^1 v^-\phi_1\,dt + (\mu^- - \lambda_1)\int_0^1 u^-\phi_1\,dt \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(\lambda^+ + \lambda_1)\int_0^1 v^+\phi_1\,dt - (\lambda^+ + \lambda_1)\int_0^1 u^+\phi_1\,dt \\ = (\lambda^- + \lambda_1)\int_0^1 v^-\phi_1\,dt - (\mu^- + \lambda_1)\int_0^1 u^-\phi_1\,dt \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

2.2. Soluciones que cambian o no de signo

Usando las identidades anteriores, llegamos a establecer la naturaleza de las soluciones no triviales de (2) y las condiciones para sus correspondientes coeficientes $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}$. En particular, describimos explícitamente $\widehat{\Sigma}_t$.

Proposición 1 *Sea* (u, v) *una solución de (2) con condiciones de frontera tipo Dirichlet y coeficientes* $\lambda^\pm$ *y* μ^- *, entonces*

1. *Ambas* u *y* v *cambian de signo o ninguna de ellas.*
2. *Si ambas* u *y* v *cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos. Más aún* $\lambda^+ > \lambda_1$ *y* $\sqrt{\lambda^-\mu^-} > \lambda_1$ *.*
3. *Si* u *y* v *no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos no nulos de* ϕ_1 *y* $\lambda^+ = \lambda_1$ *o* $\sqrt{\lambda^-\mu^-} = \lambda_1$ *. En particular, si normalizamos las autofunciones imponiendo que los coeficientes sean iguales, tenemos los casos*

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad y \quad \lambda^+ = \lambda_1 \,, \\ u = v = -\phi_1 \quad y \quad \lambda^- = \mu^- = \lambda_1 \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Proposición 2 *Sea* (u, v) *una solución de (2) con condiciones de frontera tipo Neumann y coeficientes* $\lambda^\pm$ *y* μ^- *, entonces*

1. *Ambas* u *y* v *cambian de signo o ninguna de ellas.*
2. *Si ambas* u *y* v *cambian de signo, entonces todos los coeficientes son positivos.*
3. *Si* u *y* v *no cambian de signo, entonces ambas son múltiplos de* ϕ_1 *(una de ellas puede ser cero) y uno de los coeficientes es* $\lambda_1 = 0$ *. Si ambas* u *y* v *no son cero, entonces dos de los coeficientes deben ser* $\lambda_1 = 0$ *. En particular, si normalizamos las autofunciones tenemos los siguientes casos*

$$\begin{aligned} u = v = \phi_1 \quad y \quad \lambda^+ = 0 \,, \\ u = v = -\phi_1 \quad y \quad \lambda^- = \mu^- = 0 \,, \\ u = \phi_1 \; (resp.\; u = -\phi_1), v = 0 \quad y \quad \lambda^+ = 0 \; (resp.\; \mu^- = 0) \,, \\ u = 0, v = \phi_1 \; (resp.\; v = -\phi_1) \quad y \quad \lambda^+ = 0 \; (resp.\; \lambda^- = 0) \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Así, la parte trivial $\widehat{\Sigma}_t$ tiene la siguiente forma:

- Para el caso Dirichlet $\widehat{\Sigma}_t = \{\ \lambda^+ = \lambda_1\ \} \cup \{\ \lambda^-, \mu^- > 0,\ \lambda^-\mu^- = \lambda_1^2\ \}$, donde el plano $\{\lambda^+ = \lambda_1\}$ corresponde a la familia de soluciones $u = v = k\,\phi_1$, $k > 0$, mientras que la superficie $\{\lambda^-, \mu^- > 0, \lambda^-\mu^- = \lambda_1^2\}$ corresponde a la familia $u = \sqrt{\dfrac{\lambda^-}{\mu^-}}\, v = -k\,\phi_1$, $k > 0$.

- Para el caso Neumann $\widehat{\Sigma}_t = \{\, \lambda^+ = 0 \,\} \cup \{\, \lambda^- = 0 \,\} \cup \{\, \mu^- = 0 \,\}$, donde el plano $\{\, \lambda^+ = 0 \}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = A\,\phi_1\,,\, v = B\,\phi_1,\ A, B \geq 0\}$, el plano $\{\, \lambda^- = 0 \}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = 0\,,\, v = -k\,\phi_1\,, k > 0\}$ y el plano $\{\, \mu^- = 0\}$ corresponde a las soluciones $\{\, u = -k\,\phi_1\,, k > 0\,,\, v = 0\,\}$.

Los siguientes resultados establecen que $\widehat{\Sigma}_{nt}$ cae completamente en una de las regiones acotadas por $\widehat{\Sigma}_t$ y dan propiedades geométricas de las soluciones de (2).

Proposición 3 *Si* $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ *, entonces* $\lambda^+ > \lambda_1$ *y* $\sqrt{\lambda^- \mu^-} > \lambda_1$.

Proposición 4 *Si* $(\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \widehat{\Sigma}_{nt}$ *y* (u, v) *es la correspondiente solución no trivial del problema (2), entonces* u *y* v *tienen el mismo número de ceros (simples) y ambas tienen el mismo signo en una vecindad de* 0 *y de* 1.

3. PROPIEDADES DE $\widehat{\Sigma}_{nt}$

Aquí estudiamos la parte no trivial del espectro de Fucik $\widehat{\Sigma}_{nt}$. Empezamos contruyendo un conjunto relacionado $\widetilde{\Sigma}$ en $\mathbb{R}^4$.

Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^-, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^-, \\ (u, v, u', v')(0) = (u_0, v_0, u_0', v_0')\,, \end{cases} \tag{15}$$

con $\lambda^+, \lambda^-, \mu^- \geq 0$. Para el caso del problema con condiciones de frontera Dirichlet, definimos los conjuntos

$$\widetilde{\Sigma}^{\pm} = \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad / \quad \text{la solución} & (u, v) \text{ del PVI (15)} \\ \text{con } (u_0, v_0, u_0', v_0') = (0, 0, \pm 1, s) \text{ satisface} & u(1) = v(1) = 0 \end{array} \right\} \tag{16}$$

y para el problema con condiciones de frontera Neumann,

$$\widetilde{\Sigma}^{\pm} = \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad / \quad \text{la solución} & (u, v) \text{ del PVI (15)} \\ \text{con } (u_0, v_0, u_0', v_0') = (\pm 1, s, 0, 0) \text{ satisface} & u'(1) = v'(1) = 0 \end{array} \right\}. \tag{17}$$

Luego, denotando por

$$\widehat{\Sigma}^{\pm} = \{\, (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists\, s \in \mathbb{R} \text{ tal que } (\lambda^+, \lambda^-, \mu^-, s) \in \widetilde{\Sigma}^{\pm} \,\}\,, \tag{18}$$

tenemos $\widehat{\Sigma}_{nt} = \widehat{\Sigma}^+ \cup \widehat{\Sigma}^-$. Con esto y en vista de la segunda simetría dada en el Lema 2, es suficiente estudiar $\widehat{\Sigma}^+$.

En el siguiente Lema usaremos el Teorema de la función implícita para describir $\widetilde{\Sigma}^+$ en una vecindad de uno de sus puntos.

Lema 3 *(Existencia local de las superficies de Fucik) Dado* $(\overline{\lambda}^+, \overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-, \overline{s}) \in \widetilde{\Sigma}^+$ *tal que las correspondientes soluciones no triviales* $\overline{u}$ *y* $\overline{v}$ *ambas cambian de signo, entonces localmente* $\widetilde{\Sigma}^+$ *es de la forma,* $(\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-, s(\lambda^-, \mu^-))$*, donde para un adecuado* $\varepsilon > 0$

$$(\lambda^+, s) : \langle\, \overline{\lambda}^- - \varepsilon, \overline{\lambda}^- + \varepsilon \,\rangle \times \langle\, \overline{\mu}^- - \varepsilon, \overline{\mu}^- + \varepsilon \,\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 \tag{19}$$

es una función C^1 *de* λ^- *y* μ^-*, más aún*

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) = \frac{-\displaystyle\int_0^1 (\overline{v}^-)^2}{\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2} < 0\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \lambda^+}{\partial \mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) = \frac{-\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^-)^2}{\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2} < 0\,. \tag{21}$$

Finalmente, las correspondientes soluciones no triviales tienen el mismo número de ceros (simples) y tienen el mismo signo en una vecindad de 0 y de 1.

Prueba. Veamos la prueba para el caso Dirichlet.
Denotamos por $(u,v)[\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s](x)$ a la solución del PVI

$$\begin{cases} -u'' = \lambda^+ v^+ - \lambda^- v^- \quad \text{en} \quad \langle 0,1\rangle\,, \\ -v'' = \lambda^+ u^+ - \mu^- u^- \quad \text{en} \quad \langle 0,1\rangle\,, \\ (u,v,u',v')(0) = (0,0,1,s) \quad . \end{cases} \tag{22}$$

Vamos a aplicar el Teorema de la función implícita al sistema

$$(u,v)[\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s](1) = (0,0)\;. \tag{23}$$

Primero observamos que $(u,v)[\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s](x)$ es una función C^1 de las cinco variables $(\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s)\in \overline{B}$ y $x\in[0,1]$, donde $\overline{B}$ es una adecuada vecindad del punto $(\overline{\lambda}^+,\overline{\lambda}^-,\overline{\mu}^-,\overline{s})$. En verdad, las derivadas pueden ser calculadas directamente de la ecuación diferencial, donde las nolinealidades $\lambda^+v^+-\lambda^-v^-$ y $\lambda^+u^+-\mu^-u^-$ son funciones C^1 de las variables $\lambda^\pm,\mu^-$.

Sea $(\overline{u},\overline{v}) = (u,v)[\overline{\lambda}^+,\overline{\lambda}^-,\overline{\mu}^-,\overline{s}]$. Como los ceros de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son simples (por la Proposición 4), podemos restringir la vecindad $\overline{B}$ tal que se mantenga esta propiedad para todas las funciones $(u,v)[\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s]$ con $(\lambda^+,\lambda^-,\mu^-,s)\in\overline{B}$ y tal que los ceros de u y v no desaparezcan y ambos u y v tengan el mismo signo en una vecindad de 0 y de su último cero. Observamos además que como $\overline{u}$ y $\overline{v}$ cambian de signo, esta propiedad también se mantiene en $\overline{B}$.
Ahora, para aplicar el Teorema de la Función Implícita a (23) y resolver localmente con respecto a las variables λ^-,μ^-, probaremos que

$$\det\begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1)\end{bmatrix} \neq 0\;.$$

Sean $c(x) = \overline{\lambda}^+\mathcal{X}_{\{\overline{v}>0\}}(x) + \overline{\lambda}^-\mathcal{X}_{\{\overline{v}<0\}}(x)$ y $d(x) = \overline{\lambda}^+\mathcal{X}_{\{\overline{u}>0\}}(x) + \overline{\mu}^-\mathcal{X}_{\{\overline{u}<0\}}(x)$, entonces $(\overline{u},\overline{v})$ también satisface el PVI

$$\begin{cases} -\overline{u}'' = c(x)\,\overline{v} & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -\overline{v}'' = d(x)\,\overline{u} & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ (\overline{u},\overline{v},\overline{u}',\overline{v}')(0) = (0,0,1,\overline{s})\,. \end{cases} \tag{24}$$

Definimos $(u_s,v_s)(x) = \dfrac{\partial}{\partial s}(u,v)[\overline{\lambda}^+,\overline{\lambda}^-,\overline{\mu}^-,\overline{s}](x)$ (nótese que la dependencia respecto a la variable s solo está en la condición inicial). Derivando (24) respecto a s obtenemos

$$\begin{cases} -u_s'' = c(x)\,v_s & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ -v_s'' = d(x)\,u_s & \text{en } \langle 0,1\rangle\,, \\ (u_s,v_s,u_s',v_s')(0) = (0,0,0,1)\,, \end{cases} \tag{25}$$

y notamos que, integrando dos veces y usando $v_s(0)=0$ y $v_s'(0)>0$, para $x\in\langle 0,1\,]$ tenemos

$$\begin{aligned} u_s(x) &= -\int_0^x d\xi_1\int_0^{\xi_1} c(\xi_2)v_s(\xi_2)\,d\xi_2 < 0 \qquad \text{y} \\ v_s(x) &= x - \int_0^x d\xi_1\int_0^{\xi_1} d(\xi_2)u_s(\xi_2)\,d\xi_2 > 0\;. \end{aligned}$$

Y con esto llegamos a

$$\int_0^1 -u_s\,\overline{v}'' - v_s\,\overline{u}''\,dt + \left[-u_s'\,\overline{v} - v_s'\,\overline{u} + u_s\,\overline{v}' + v_s\,\overline{u}'\right]_0^1 = \int_0^1 c(x)v_s\overline{v} + d(x)u_s\overline{u}\,dt\,. \tag{26}$$

Ahora, como $(\overline{\lambda}^+, \overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-, \overline{s}) \in \widetilde{\Sigma}^+$, $(\overline{u}, \overline{v})$ también es solución del problema de valor frontera, es decir $\overline{u}(0) = \overline{v}(0) = \overline{u}(1) = \overline{v}(1) = 0$ y con ello en la ecuación (26) solo queda

$$(u_s\overline{v}' + v_s\overline{u}')(1) = 0\,. \tag{27}$$

En forma análoga, definimos

$$(u_{\lambda^+}, v_{\lambda^+})(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda^+}(u,v)[\overline{\lambda}^+, \overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-, \overline{s}](x)\,,$$

$$(u_{\lambda^-}, v_{\lambda^-})(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda^-}(u,v)[\overline{\lambda}^+, \overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-, \overline{s}](x)\,,$$

$$(u_{\mu^-}, v_{\mu^-})(x) = \frac{\partial}{\partial\mu^-}(u,v)[\overline{\lambda}^+, \overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-, \overline{s}](x)\,,$$

(nótese que la dependencia respecto a las variables λ^+, λ^- y μ^- está en los coeficientes $c(x)$ y $d(x)$). Derivando (24) respecto a λ^+, λ^- y μ^- obtenemos, respectivamente

$$\begin{cases} -u''_{\lambda^+} = c(x)\,v_{\lambda^+} + \overline{v}^+ & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ -v''_{\lambda^+} = d(x)\,u_{\lambda^+} + \overline{u}^+ & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ (u_{\lambda^+}, v_{\lambda^+}, u'_{\lambda^+}, v'_{\lambda^+})(0) = (0,0,0,0) \end{cases}, \tag{28}$$

$$\begin{cases} -u''_{\lambda^-} = c(x)\,v_{\lambda^-} - \overline{v}^- & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ -v''_{\lambda^-} = d(x)\,u_{\lambda^-} & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ (u_{\lambda^-}, v_{\lambda^-}, u'_{\lambda^-}, v'_{\lambda^-})(0) = (0,0,0,0) \end{cases}, \tag{29}$$

$$\text{y} \qquad \begin{cases} -u''_{\mu^-} = c(x)\,v_{\mu^-} & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ -v''_{\mu^-} = d(x)\,u_{\mu^-} - \overline{u}^- & \text{en } \langle 0,1\rangle \\ (u_{\mu^-}, v_{\mu^-}, u'_{\mu^-}, v'_{\mu^-})(0) = (0,0,0,0) \end{cases}. \tag{30}$$

Efectuando las mismas operaciones realizadas para obtener la ecuación (27) y usando $w = w^+ - w^-$ y $w^+.\,w^- = 0$, llegamos a

$$(u_{\lambda^+}\overline{v}' + v_{\lambda^+}\overline{u}')(1) \;=\; \int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2\,, \tag{31}$$

$$(u_{\lambda^-}\overline{v}' + v_{\lambda^-}\overline{u}')(1) \;=\; \int_0^1 (\overline{v}^-)^2\,, \tag{32}$$

$$(u_{\mu^-}\overline{v}' + v_{\mu^-}\overline{u}')(1) \;=\; \int_0^1 (\overline{u}^-)^2\,. \tag{33}$$

Ahora, como el vector $(u_s(1), v_s(1))$ es no nulo y por (27) es ortogonal a $(\overline{v}'(1), \overline{u}'(1))$, mientras que por (31) $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$ no es ortogonal a $(\overline{v}'(1), \overline{u}'(1))$, entonces $(u_s(1), v_s(1))$ y $(u_{\lambda^+}(1), v_{\lambda^+}(1))$ no son paralelos. En consecuencia

$$\det \begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & v_{\lambda^+}(1) \\ u_s(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \neq 0\,, \tag{34}$$

y tenemos lo que necesitamos para aplicar el Teorema de la función implícita al sistema (23) y obtener la función $(\lambda^+, s)(\lambda^-, \mu^-)$.

Ahora, también podemos obtener las derivadas $\dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-)$ y $\dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-)$.

En efecto, derivando (23) respecto a λ^- y μ^-, tenemos

$$\begin{bmatrix} u_{\lambda^+}(1) & u_s(1) \\ v_{\lambda^+}(1) & v_s(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \\ \dfrac{\partial s}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial s}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{\lambda^-}(1) & u_{\mu^-}(1) \\ v_{\lambda^-}(1) & v_{\mu^-}(1) \end{bmatrix}; \tag{35}$$

y multiplicando ambos términos a la izquierda por $(\overline{v}'(1), \overline{u}'(1))$ tenemos

$$\begin{bmatrix} (u_{\lambda^+}\overline{v}' + v_{\lambda^+}\overline{u}')(1) & (u_s\overline{v}' + v_s\overline{u}')(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \\ \dfrac{\partial s}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial s}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} (u_{\lambda^-}\overline{v}' + v_{\lambda^-}\overline{u}')(1) & (u_{\mu^-}\overline{v}' + v_{\mu^-}\overline{u}')(1) \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Luego, por (27), (31), (32) y (33),

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial\lambda^+}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \\ \dfrac{\partial s}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) & \dfrac{\partial s}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^1 (\overline{v}^-)^2 & \displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^-)^2 \end{bmatrix}$$

y de ahí tenemos que

$$\frac{\partial\lambda^+}{\partial\lambda^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) = \frac{-\displaystyle\int_0^1 (\overline{v}^-)^2}{\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\lambda^+}{\partial\mu^-}(\overline{\lambda}^-, \overline{\mu}^-) = \frac{-\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^-)^2}{\displaystyle\int_0^1 (\overline{u}^+)^2 + (\overline{v}^+)^2} < 0.$$

La prueba para el caso Neumann es análoga. □

Este resultado que hemos demostrado nos permite deducir que $\widetilde{\Sigma}^+$ puede ser expresado como una función definida en un conjunto abierto conexo Λ, es decir $\widetilde{\Sigma}^+ = \{ (\lambda^+(\lambda^-, \mu^-), \lambda^-, \mu^-), s(\lambda^-, \mu^-)) : \lambda^-, \mu^- \in \Lambda \}$ y con ello que las componentes conexas de $\widetilde{\Sigma}$ son superficies.

Proposición 5 *Existe una relación uno a uno entre los autovalores $\{ \lambda_k \}_{k \geq 2}$ de $-u''$ y aquellas componentes conexas de $\widetilde{\Sigma}^+$ (respectivamente $\widetilde{\Sigma}^-$) que corresponden a soluciones no triviales que cambian de signo.*

Corolario 1 *Por cualquier punto $(\lambda_k, \lambda_k, \lambda_k) \in \widehat{\Sigma}$, con $k \geq 2$, pasan exactamente dos superficies en $\widehat{\Sigma}_{nt}$, específicamente $\widehat{\Sigma}_k^+$ y $\widehat{\Sigma}_k^-$. En particular, como ocurre con la autofunción correspondiente a λ_k, las soluciones no triviales correspondientes a un punto en $\widehat{\Sigma}_k^\pm$ siempre tienen $(k-1)$ ceros interiores. Más aún, cualquier punto en $\widehat{\Sigma}_{nt}$ pertenece a una de estas superficies.*

Proposición 6 *Existe una biyección entre* Σ_{escal} *y el subconjunto de* $\widehat{\Sigma}$ *con* $\lambda^- = \mu^-$ *. En particular, si* u *es solución no trivial del problema escalar (1) correspondiente a un punto* $(\lambda^+, \lambda^-) \in \Sigma_{escal}$ *, entonces el par* (u, u) *es una solución no trivial del problema (2) correspondiente al punto* $(\lambda^+, \lambda^-, \lambda^-) \in \widehat{\Sigma}$ *y viceversa.*

Finalmente, los siguientes resultados muestran que las superficies $\widehat{\Sigma}_k^+$ correspondientes a soluciones con diferente número de ceros, son disjuntas, y que las superficies de Fucik $\widehat{\Sigma}_k^+$ y $\widehat{\Sigma}_k^-$ pueden o no coincidir.

Proposición 7 *Si* $h > k \geq 2$ *, entonces* $\left(\widehat{\Sigma}_k^+ \bigcup \widehat{\Sigma}_k^-\right) \bigcap \left(\widehat{\Sigma}_h^+ \bigcup \widehat{\Sigma}_h^-\right) = \emptyset$ *. Más aún,* $\left(\widehat{\Sigma}_k^+ \bigcup \widehat{\Sigma}_k^-\right) \bigcap \widehat{\Sigma}_t = \emptyset$ *.*

Proposición 8 *Las superficies* $\widehat{\Sigma}_k^{\pm}$ *verifican:*

1. *Para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet:*
   - *i)* $\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^-$ *para todo par* $k \geq 2$
   - *ii)* $\widehat{\Sigma}_k^+ \not\equiv \widehat{\Sigma}_k^-$ *para todo impar* $k \geq 3$ *.*
2. *Para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann:*

   $\widehat{\Sigma}_k^+ \equiv \widehat{\Sigma}_k^-$ *para todo* $k \geq 2$ *.*

REFERENCIAS

[1] CAMPOS J. Y DANCER E. N. *On the resonance set in a fourth-order equation with jumping nonlinearity*. Differential Integral Equations 14(3) (2001), pp. 257-272.

[2] DANCER E. N. Y DU Y. H. *Competing species equations with diffusion, large interactions and jumping nonlinearities*. J. Differential Equations 114, n 2, (1994), pp. 434-475.

[3] DE FIGUEIREDO D. G. Y RUF B. *On the periodic Fucik spectrum and a superlinear Sturm-Liouville equation*. Proc. Roy. Soc. Edimburgh Sect A 123 (1) (1993) pp. 95-107.

[4] FUCIK S. *Boundary value problem with jumping nonlinearities*. Casopis Pest. Mat 101 (1) (1976), pp. 69-87.

[5] FUCIK S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1980).

[6] GLOVER J., LAZER C. Y MCKENNA P. J. *Existence and stability of large scale nonlinear oscillations in suspension bridges*. Z. Angew. Math. Phys. 40, n 2, (1989), pp. 172-200.

[7] LAZER C. Y MCKENNA P. J. *Nonlinear periodic flexing in a floating beam*. J. Comput. Appl Math. 52 , n 1-3, (1994), pp. 287-303.

[8] MASSA E. *On the Fucik Spectrum and superlinear elliptic equations*. PhD. Thesis, Universit degli Studi di Milano, Italy (2003).

[9] MCKENNA P. J. Y MOORE K. S. *Mathematics arising from suspension bridge dynamics:recent developments*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein 101 n 4,(1999), pp. 178-195.

[10] ROJAS S. *Espectro de Fucik para el problema de valor frontera Sturm-Liouville*. Pesquimat, revista de investigación de la Fac. Ciencias Mat. UNMSM Vol IX, no. 2, (2006), pp. 31-49.