MAT

Serie A

Conferencias, Seminarios
y Trabajos de Matemática.

ISSN:1515-4904

19

VII Italian Latin American Conference on Indutrial and Applied Mathematics

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
Octubre 2014

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 19

VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

Rosario, Octubre 2014

MAT - Serie A, 19 (2014), 9-16

SOBRE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UN MODELO DE PROPAGACIÓN DEL SONIDO EN UN FLUÍDO COMPRESIBLE

Martha Hilda Timoteo Sánchez[♭] y Yolanda Santiago Ayala[†]

[♭] *Departamento Académico de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga 375, Lima-Perú, mtimoteos@unmsm.edu.pe, http://www.unmsm.edu.pe.*
[†] *Departamento Académico de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga 375, Lima-Perú, yssantiago@gmail.com, http://www.unmsm.edu.pe.*

Resumen: Estudiamos un modelo que describe la evolución del sonido vía problemas de Transmisión. Asumiendo que el modelo tiene coeficientes constantes a trozos y bajo adecuadas condiciones geométricas en el dominio y de interfaces, probaremos mediante un espacio funcional adecuado la existencia y unicidad de la solución del problema, para lo cual usamos una variante del resultado dado por J. Lions y Duvaut [1] vía la Teoría de Semigrupos.

Palabras clave: *Propagación del sonido, Problema de Transmisión y Teoría de Semigrupos* .
2000 AMS Subject Classification: 35Q99, 35L99

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de transmision fuerón considerados por J.-L. Lions [6] y S. Nicaise [7],[8] para las ecuaciones de onda. La controlabilidad en la frontera para una clase de segundo orden de sistemas hiperbólicos fue estudiado por Lagnese [5]. El modelo que estudiamos incluye un término de tipo memoria. Incluir términos de tipo memoria en las ecuaciones o en la frontera son muy naturales en los problemas que surgen en viscoelasticidad. La condición de frontera con términos de tipo memoria para las ecuaciones de Maxwell fueron introducidos por Fabrizio y Morro [2] y ha sido investigado en [4].

2. PRELIMINARES

Teorema 1 *Sea Ω un conjunto abierto acotado cuya frontera Γ es una variedad de dimensión $(n-1)$, de clase C^1, Ω está localmente a un solo lado de Γ. $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ designa el espacio de las funciones de clase C^1 sobre $\overline{\Omega}$ y $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ es denso sobre $H^1(\Omega)$,(ver [1]).*

Definición 1 $\left(C_K^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ *es el espacio de la funciones vectoriales de clase C^1 sobre $\overline{\Omega}$ y con soporte compacto en $\overline{\Omega}$, (ver [1]).*

Teorema 2 *Supongamos que Ω tiene una frontera Γ regular y acotada entonces $\left(C_K^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ es denso sobre $H(Div;\Omega)$,(ver [1]).*

Definición 2 *Sea el espacio $H(Div;\Omega) := \left\{v \in (L^2(\Omega))^n / Div\, v \in L^2(\Omega)\right\}$ normado por*

$$\|v\|_{H(Div;\Omega)} = \left\{\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|Div\, v\|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2} \tag{1}$$

Claramente, $H(Div;\Omega)$ es un espacio de Hilbert para la norma (1), (ver [3]).

Teorema 3 *Si Ω es un subconjunto abierto de $I\!R^n$ con frontera Γ continua, Lipchiziana y acotada entonces $\overline{D(\overline{\Omega})^n} = H(Div;\Omega)$, (ver [3]).*

Teorema 4 *Sea O una región acotada de $I\!R^3$ con frontera regular ∂O y la aplicación*

$$W_0 : \left[C^1(\overline{O})\right]^3 \to C^1(\partial O) \,/\, W_0\,(u) = u \bullet \eta,$$

donde $\eta = \eta(x)$ denota el vector normal unitario en $x \in \partial O$ apuntando al exterior de $\overline{O}$. Entonces W_0 se extiende por continuidad a la aplicación lineal

$$W : H(Div, O) \to H^{-1/2}(\partial O) \quad / \quad W(u) = u \bullet \eta.$$

Prueba. Sea $\varphi \in H^{1/2}(\partial O)$ entonces $\exists \phi \in H^1(O)$ tal que $\phi/_{\partial O} = \varphi$ (por el Teorema del trazo). Para un elemento arbitrario $u = (u_1, u_2, u_3) \in H(Div, \Omega)$, definimos la función $F_u : H^{1/2}(\partial\Omega) \to I\!R$ tal que

$$F_u(\varphi) = \int_O \{\phi \, Div \, u + u \bullet Grad \, \phi\} \, dx$$

Supongamos que $\psi \in H^1(O)$ tal que $\psi/_{\partial O} = \phi$, claramente $(\phi - \psi) \in H^1(O)$. Debido a la continuidad de la función trazo tenemos

$$\|\phi - \psi\|_{H^1(O)} \leq \|\phi|_{\partial O} - \psi|_{\partial O}\|_{H^{1/2}(\partial O)} = \|\varphi - \varphi\|_{H^{1/2}(\partial O)} = 0 \quad \text{entonces} \quad \phi = \psi \tag{2}$$

De (2), $F_u(\xi)$ no depende de la elección de ϕ. Por otro lado, F_u esta acotado en $H^{1/2}(\partial O)$,

$$|F_u(\varphi)| \leq \int_O |\phi| \, |Div \, u| \, dx + \int_O |u| \, |Grad \, \phi| \, dx \leq C \, \|\phi\|_{H^1(O)} \, \|Div \, u\|_{H(Div, O)}$$

donde C es una constante positiva. Por lo tanto, $\exists W(u) \in H^{-1/2}(\partial O)$ tal que $F_u(\varphi) = \langle W(u), \varphi \rangle_{\partial O}$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial O}$ denota la dualidad entre $H^{1/2}(\partial O)$ y $H^{-1/2}(\partial O)$. $\square$

3. Existencia y Unicidad de la Solución

Sea Ω un dominio acotado de $I\!R^3$ con frontera $\partial\Omega$ suave, la cual consiste de dos superficies cerradas disjuntas S_0 y S_1, es decir $\Omega = D_0 \backslash \overline{D}_1$ donde D_0 y D_1 son dominios abiertos y acotados, $\overline{D}_1 \subset D_0$ con $\partial D_0 = S_0$ y $\partial D_1 = S_1$, como se muestra en la Figura 1. Supongamos que Ω está ocupado por un fluído

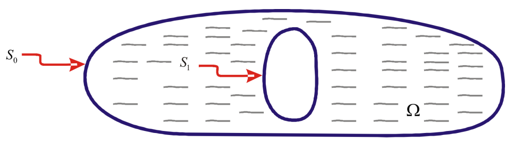

Figura 1: Dominio Ω

compresible no homogéneo. Un conocido modelo lineal que describe la evolución del sonido en un fluído compresible es

$$\beta(x)\frac{\partial u}{\partial t} + Grad \, p = 0, \qquad \gamma(x)\frac{\partial p}{\partial t} + Div \, u = 0 \;, \tag{3}$$

donde $p = p\,(x, t)$ denota la presión acústica, $u = (u_1, u_2, u_3)$ con $u_j = u_j\,(x, t)$ es la velocidad del cuerpo, $\beta\,(x) > 0$ es la densidad de equilibrio y $\gamma\,(x)$ es la compresibilidad. Las condiciones de frontera del problema (3) son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & 0 \text{ en } S_1 \times (0, +\infty) \\ u \bullet \eta & = & \alpha\,(x)\,p + a\,(x) \displaystyle\int_0^t p\,(x, s)\, e^{-\sigma(x)(t-s)} ds \text{ en } S_0 \times (0, +\infty) \;, \end{array} \right. \tag{4}$$

donde $\eta = \eta\,(x)$ denota al vector normal unitario apuntando al exterior de Ω en $x \in \partial\Omega$.

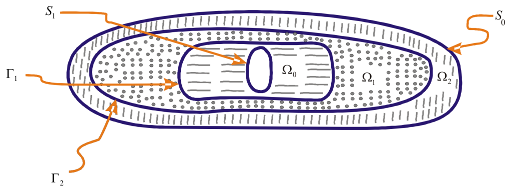

Figura 2: n=3

3.1. PROBLEMA DE TRANSMISIÓN

Sea Ω y $\partial\Omega$ como en la Figura 1 y supongamos que Ω está construido de la siguiente forma: fijamos un entero $n > 1$ y para cada $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ sea $D_1 \subset B_k \subset D_0$, B_k un subconjunto abierto acotado con frontera suave tal que $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$. Denotamos por $\Omega_0 = B_1 \backslash \overline{D}_1$ y $\Omega_k = B_{k+1} \backslash \overline{B}_k$ para $k \in \{1, 2, ..., n-2\}$, $\Omega_{n-1} = D_0 \backslash \overline{B}_{n-1}$. La Figura 2 ilustra esta situación.

$$\Omega_0 = B_1 \backslash \overline{D}_1, \;\; \Omega_1 = B_2 \backslash \overline{B}_1, \;\; \Omega_2 = B_3 \backslash \overline{B}_2, \;\; \Gamma_1 = \partial B_1 \;\text{ y }\; \Gamma_2 = \partial B_2.$$

Definimos el problema de Transmisión para cada $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ por

$$\beta^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + Grad\, p^{(k)} = 0, \qquad \gamma^{(k)} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial t} + Div\, u^{(k)} = 0 \tag{5}$$

Con condiciones iniciales: $u^{(k)}(x, 0) = f^{(k)}(x)$ y $p^{(k)}(x, 0) = \psi^{(k)}(x), x \in \Omega_k$ y $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Las condiciones de frontera para $\{u, p\}$ en S_0 y S_1 son las mismas como en (4). En las superficies (las interfaces) los elementos $\left\{u^{(k)}, p^{(k)}\right\}$ son requeridas para satisfacer

$$\begin{cases} u^{(k)} \bullet \eta = u^{(k-1)} \bullet \eta \\ \qquad p^{(k)} = p^{(k-1)} \end{cases} \tag{6}$$

para $(x, t) \in \Gamma_k$ y $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. En (5)-(6), $\beta^{(k)}, \gamma^{(k)}, u^{(k)}, p^{(k)}$ denotan las restricciones de las correspondientes funciones en Ω_k. Consideraremos las siguientes condiciones:

HIPÓTESIS

1.- Las funciones $\beta(x)$ y $\gamma(x)$ en (3) son funciones constantes a trozos de $\overline{\Omega} \to I\!R$, las cuales pierden continuidad solo en Γ_k, $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ y sus restricciones a Ω_k satisfacen las condiciones

$$\beta^{(k)} := \beta|_{\Omega_k} > 0 \quad , \quad \gamma^{(k)} := \gamma|_{\Omega_k} > 0 \text{ para } k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}\,.$$

2.- Las funciones $\alpha(x)$, $a(x)$ y $\sigma(x)$ son real-valuadas de $S_0 \to I\!R$, pertenecen a $C^1(S_0)$ con $\alpha(x) > 0, a(x) \geq 0$ y $\sigma(x) > 0$.

De (4) definimos

$$q(x, t) := \int_0^t p\,(x, s)\, e^{-\sigma(x)(t-s)} ds \quad \text{en} \quad S_0 \times (0, +\infty)\;,$$

que es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\sigma q + p \;\text{ con condición inicial }\; q(x, 0) = 0\,. \tag{7}$$

3.2. ESPACIOS DE HILBERT $\mathcal{H}_0$ Y $\mathcal{H}_1$

Consideremos los siguientes espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 = \{w = (u, p, q) \text{ donde } u \text{ es una función vectorial, } p \text{ y } q \text{ son funciones escalares}/ \\ u = (u_1, u_2, u_3) \in \left[L^2(\Omega_k)\right]^3, p \in L^2(\Omega_k) \text{ y } q \in L^2(S_0)\Big\}\,.$$

con producto interno

$$\langle w,\widetilde{w}\rangle_{\mathcal{H}_0}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega_k}\left\{\beta^{(k)}u^{(k)}\bullet\widetilde{u}^{(k)}+\gamma^{(k)}p^{(k)}\widetilde{p}^{(k)}\right\}dx+\int_{S_0}a^{(k)}q\widetilde{q}d\Gamma$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 \;=\; & \Big\{w=(u,p,q)\in\mathcal{H}_0\;/\;Div\,u\in L^2(\Omega_k)\;\text{ y }\;Grad\,p\in\left[L^2(\Omega_k)\right]^3\\ & \quad\text{para}\,k\in\{0,1,2,...,n-1\}\Big\}\,.\end{aligned}$$

con producto interno

$$\langle w,\widetilde{w}\rangle_{\mathcal{H}_1}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega_k}\left\{\beta^{(k)}u^{(k)}\bullet\widetilde{u}^{(k)}+\gamma^{(k)}\,p^{(k)}\widetilde{p}^{(k)}+Grad\,p^{(k)}\bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}\right\}dx+\int_{S_0}a^{(k)}\,q\,\widetilde{q}d\Gamma$$

Nota 1 *Si $(u,p,q)\in\mathcal{H}_1$ entonces $p\in L^2(\Omega_k)$ y $Grad\,p\in\left[L^2(\Omega_k)\right]^3$. Por lo tanto, $p\in H^1(\Omega_k)$ para $k\in\{1,2,...,n-1\}$, luego por el Teorema del trazo, p esta bien definido en Γ_k, $k\in\{1,2,...,n-1\}$ así como también en S_0 y S_1. Definimos a la función p en la frontera de Ω_k de la siguiente forma:*

$$\gamma_0:H^1(\Omega_k)\to H^{1/2}(\partial\Omega_k)\quad\text{tal que}\quad\gamma_0(p)=p|_{\partial\Omega_k}.$$

Si $p\in H^1(\Omega_k)$ entonces

$$\gamma_0(p)=p^{(k)}(x,t)\ \ ,\ \ (x,t)\in\partial\Omega_k\ ,$$

para $k\in\{0,1,\ldots,n-2\}$.
Si $p\in H^1(\Omega_{n-1})$ entonces

$$\gamma_0(p)=\begin{cases}p^{(n-1)}(x,t) & ,\ (x,t)\in\Gamma_{n-1}\\ 0 & ,\ (x,t)\in S_1\ .\end{cases}$$

Por lo tanto, $p\in H^{1/2}(\Gamma_k),\ p\in H^{1/2}(S_0)$ y $p\in H^{1/2}(S_1)$.

3.3. Definición del Operador A

De (3) tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\beta}Grad\,p\quad\text{y}\quad\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{1}{\gamma}Div\,u\ .\tag{8}$$

Luego, de las ecuaciones (7) y (8) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial p}{\partial t}\\ \frac{\partial q}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\beta}Grad & 0\\ -\frac{1}{\gamma}Div & 0 & 0\\ 0 & I & -\sigma I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ p\\ q\end{bmatrix}\tag{9}$$

El sistema obtenido en (9) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases}Y_t=AY\\ Y\,(0)=(u(x,0),p(x,0),q(x,0))^T=(f(x),\Psi(x),0)^T.\end{cases}\tag{10}$$

El operador $A:D(A)\subseteq\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_0$ queda definido por

$$A(u,p,q)=\left(-\frac{1}{\beta}Grad\,p,-\frac{1}{\gamma}Div\,u,p-\sigma q\right)\tag{11}$$

con dominio

$$
\begin{aligned}
D(A) &= \{w=(u,p,q)\in\mathcal{H}_0 \ / \ Aw=w_t\in\mathcal{H}_0 \ \text{ y las condiciones de frontera}\} \\
D(A) &= \Big\{w=(u,p,q)\in\mathcal{H}_1 \ / \ u^{(k)}\bullet\eta=u^{(k-1)}\bullet\eta \ \ , \ \ p^{(k)}=p^{(k-1)} \text{ en } \Gamma_k\,, \\
&\qquad k\in\{1,2,...,n-1\} \ \text{ con } p=0 \text{ en } S_1 \ \text{ y } \ u\bullet\eta=\alpha p+aq \text{ en } S_0\}
\end{aligned}
$$

Mediante el Teorema del Trazo se consigue demostrar que $D(A)$ es un subespacio cerrado en $\mathcal{H}_1$. Así mismo, por el Teorema del Trazo, el Teorema 3 y el Teorema 4 se demuestra que $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}_0$.

3.4. Operador Adjunto A^*

Ahora determinaremos el operador adjunto de A

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{w},Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \left\langle(\widetilde{u},\widetilde{p},\widetilde{q})\,,\left(-\frac{1}{\beta}Grad\,p,-\frac{1}{\gamma}Div\,u,-\sigma q-p\right)\right\rangle_{\mathcal{H}_0} \\
\langle\widetilde{w},Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\Omega_k}\left\{-\widetilde{u}^{(k)}\bullet Grad\,p^{(k)}-\widetilde{p}^{(k)}Div\,u^{(k)}\right\}dx-\int_{S_0}a\widetilde{q}\sigma q d\Gamma+\int_{S_0}a\widetilde{q}p\,d\Gamma, \quad (12)
\end{aligned}
$$

Usando la Generalización del Teorema de Green en la ecuación (12) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{w},Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega_k}p^{(k)}Div\,\widetilde{u}^{(k)}dx-\int_{\partial\Omega_k}p^{(k)}\widetilde{u}^{(k)}\bullet\eta_1 d\Gamma+\int_{\Omega_k}u^{(k)}\bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}dx\right. \\
&\quad \left.-\int_{\partial\Omega_k}\widetilde{p}^{(k)}u^{(k)}\bullet\eta_2\,d\Gamma\right\}-\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\,\sigma q d\Gamma+\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\,p\,d\Gamma\,. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\widetilde{p}^{(k)}=\widetilde{p}^{(k-1)}$ en Γ_k, $k\in\{1,2,...,n-1\}$ y $\widetilde{p}=0$ en S_1 entonces

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial\Omega_k}\widetilde{p}^{(k)}u^{(k)}\bullet\eta_2\,d\Gamma=\int_{S_0}\widetilde{p}\,u\bullet\eta_2\,d\Gamma\,. \qquad (14)
$$

Así mismo, supongamos que $\widetilde{u}^{(k)}\bullet\eta_1=\widetilde{u}^{(k-1)}\bullet\eta_1$ en Γ_k, $k\in\{1,2,...,n-1\}$ entonces

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\partial\Omega_k}p^{(k)}\widetilde{u}^{(k)}\bullet\eta_1\,d\Gamma=\int_{S_0}p\,\widetilde{u}\bullet\eta_1\,d\Gamma\,. \qquad (15)
$$

Reemplazando (14) y (15) en (13) tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{w},Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega_k}p^{(k)}Div\,\widetilde{u}^{(k)}dx+\int_{\Omega_k}u^{(k)}\bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}dx\right\}-\int_{S_0}p\widetilde{u}\bullet\eta_1 d\Gamma \\
&\quad -\int_{S_0}\widetilde{p}\,u\bullet\eta_2 d\Gamma-\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\,\sigma q d\Gamma+\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\,p\,d\Gamma\,. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Como $w\in D(A)$ entonces $u\bullet\eta_2=\alpha\,p+a\,q$, luego en (16) conseguimos

$$
\begin{aligned}
\langle\widetilde{w},Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega_k}p^{(k)}Div\,\widetilde{u}^{(k)}dx++\int_{\Omega_k}u^{(k)}\bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}dx\right\}-\int_{S_0}p\,\widetilde{u}\bullet\eta_1\,d\Gamma \\
&\quad -\int_{S0}\widetilde{p}\,(\alpha p+aq)d\Gamma-\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\sigma q\,d\Gamma+\int_{S_0}a\,\widetilde{q}\,p\,d\Gamma\,. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Finalmente, supongamos que $\widetilde{u} \bullet \eta_1 = -\alpha\,\widetilde{p} + a\,\widetilde{q}$ en S_0, reemplazando en (17) obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{w}, Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega_k} p^{(k)} Div\,\widetilde{u}^{(k)}dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}dx\right\} - \int_{S_0} p(-\alpha\widetilde{p} + a\widetilde{q})d\Gamma \\ &\quad - \int_{S_0}\widetilde{p}\,(\alpha\,p + a\,q)\,d\Gamma - \int_{S_0} a\,\widetilde{q}\,\sigma q\,d\Gamma + \int_{S_0} a\,\widetilde{q}\,p\,d\Gamma\,.\end{aligned}$$

Eliminando algunos términos tenemos

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{w}, Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} = &\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{\Omega_k} p^{(k)} Div\,\widetilde{u}^{(k)}dx + \int_{\Omega_k} u^{(k)} \bullet Grad\,\widetilde{p}^{(k)}dx\right\} \\ &+ \int_{S_0} aq(-\sigma\widetilde{q} - \widetilde{p})\,d\Gamma\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Las condiciones asumidas anteriormente nos permiten definir el operador adjunto $A^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ como

$$A^*(\widetilde{u}, \widetilde{p}, \widetilde{q}) = \left(\frac{1}{\beta}Grad\,\widetilde{p}, \frac{1}{\gamma}Div\,\widetilde{u},\ -\sigma\widetilde{q} - \widetilde{p}\right)$$

con dominio

$$\begin{aligned}D(A^*) = \Big\{&\widetilde{w} = (\widetilde{u}, \widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathcal{H}_1\ \ /\ \ \widetilde{u}^{(k)} \bullet \eta = \widetilde{u}^{(k-1)} \bullet \eta\ \text{ y }\ \widetilde{p}^{(k)} = \widetilde{p}^{(k-1)}, \\ &k \in \{1, 2, ..., n-1\}\ \text{ con } \widetilde{p} = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } \widetilde{u} \bullet \eta = -\alpha\widetilde{p} + a\widetilde{q} \text{ en } S_0\Big\}\,.\end{aligned}$$

Luego, el lado derecho de la ecuación (18) se puede escribir

$$\langle \widetilde{w}, Aw\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle\left(\tfrac{1}{\beta}\,Grad\,\widetilde{p}, \tfrac{1}{\gamma}\,Div\,\widetilde{u}, -\sigma\,\widetilde{q} - \widetilde{p}\right), (u, p, q)\right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle A^*\widetilde{w}, w\rangle_{\mathcal{H}_0}$$

Finalmente usando el Teorema del Trazo y densidad se demuestra que $D(A^*)$ es denso en $\mathcal{H}_0$.

3.5. Operador Adjunto de A^*

Siguiendo un proceso similar a la sección anterior podemos determinar el operador adjunto de A^*

$$\left\langle \widetilde{\widetilde{w}}, A^*\widetilde{w}\right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle\left(-\frac{1}{\beta}\,Grad\,\widetilde{\widetilde{p}}, -\frac{1}{\gamma}\,Div\,\widetilde{\widetilde{u}}, -\sigma\widetilde{\widetilde{q}} + \widetilde{\widetilde{p}}\right), (\widetilde{u}, \widetilde{p}, \widetilde{q})\right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle A^{**}\widetilde{\widetilde{w}}, \widetilde{w}\right\rangle_{\mathcal{H}_0}$$

siempre que $A^{**} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ tal que

$$\begin{aligned}D(A^{**}) = \Big\{&\widetilde{\widetilde{w}} = (\widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{p}}, \widetilde{\widetilde{q}}) \in \mathcal{H}_1\ \ /\ \ \widetilde{\widetilde{u}}^{(k)} \bullet \eta = \widetilde{\widetilde{u}}^{(k-1)} \bullet \eta\ \text{ y }\ \widetilde{\widetilde{p}}^{(k)} = \widetilde{\widetilde{p}}^{(k-1)}, k \in \{1, 2, ..., n-1\} \\ &\text{con } \widetilde{\widetilde{p}} = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } \widetilde{\widetilde{u}} \bullet \eta = \alpha\widetilde{\widetilde{p}} + a\widetilde{\widetilde{q}} \text{ en } S_0\Big\}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^{**}\left(\widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{p}}, \widetilde{\widetilde{q}}\right) = \left(-\frac{1}{\beta}\,Grad\,\widetilde{\widetilde{p}}, -\frac{1}{\gamma}\,Div\,\widetilde{\widetilde{u}}, -\sigma\widetilde{\widetilde{q}} + \widetilde{\widetilde{p}}\right)\,. \tag{19}$$

De (11) y (19) tenemos

$$A = A^{**}\,. \tag{20}$$

Los operadores A y A^* son densamente definidos. El operador A^{**} es cerrado en $\mathcal{H}_0$. Por lo tanto de (20), el operador A es cerrado en $\mathcal{H}_0$.

Lema 1 *Asumiendo las Hipótesis dadas líneas arribas, entonces, ambos operadores A y A^* son disipativos, esto es ,*

$$\langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}_0} \leq 0 \quad \textit{para algún} \;\; w \in D(A) \;, \qquad \langle A^*\widetilde{w}, \widetilde{w}\rangle_{\mathcal{H}_0} \leq 0 \quad \textit{para algún} \;\; \widetilde{w} \in D(A)\,.$$

Prueba. Definamos el conjunto G y demostraremos que $\overline{G} = D(A)$,

$$\begin{aligned} G = \Big\{ & w = (u,p,q) \text{ funciones suaves a trozos } \; / \; u = (u_1,u_2,u_3) \in \; (C^1(\Omega_k))^3, p \in C^1(\Omega_k), \\ & k \in \{0,2,...,n-1\} \text{ y } q \in C(S_0) \text{ con condiciones en la frontera, } u^{(k)} \bullet \eta = u^{(k-1)} \bullet \eta \\ & \text{y } p^{(k)} = p^{(k-1)} \text{ en } \Gamma_k \;,\; p = 0 \text{ en } S_1 \text{ y } u \bullet \eta = \alpha p + aq \text{ en } S_0 \Big\}\,. \end{aligned}$$

Sea $(u,p,q) \in D\,(A)$ entonces $u^{(k)} \in H\,(div, \Omega_k)$, $p^{(k)} \in H^1\,(\Omega_k)$ y $q \in L^2\,(S_0)$. Del Teorema 2, $\exists\, u_m^{(k)} \in \left[C_K^1\left(\overline{\Omega}_k\right)\right]^3$ tal que $u_m^{(k)} \to u^{(k)}$ en $H\,(div, \Omega_k)$.
Por otro lado, del Teorema 1, $\exists\, p_m^{(k)} \in C^1\left(\overline{\Omega}_k\right)$ tal que $p_m^{(k)} \to p^{(k)}$ en $H^1\,(\Omega_k)$, y $\exists\, q_m \in C^1\,(S_0)$ tal que $q_m \to q$ en $L^2\,(S_0)$.
Definamos la siguiente sucesión en $\overline{\Omega}$:

$$u_m = \begin{cases} u_m^{(0)} & \text{en } \overline{\Omega}_0, \\ u_m^{(1)} & \text{en } \overline{\Omega}_1, \\ \vdots & \\ u_m^{(n-1)} & \text{en } \overline{\Omega}_{n-1}\,. \end{cases}$$

Además de la Definición 1, $u_m^{(k)} \in \left[C^1\left(\overline{\Omega}_k\right)\right]^3$ y con soporte compacto en $\overline{\Omega}_k$. Así que, $u_m^{(k)} = 0$ en $\partial\Omega_k$. Lo mismo sucede para $u_m^{(k-1)} = 0$ en $\partial\Omega_{k-1}$. Por lo tanto, $u_m^{(k)} \bullet \eta = u_m^{(k-1)} \bullet \eta = 0$ en Γ_k. Así mismo, definimos la sucesión:

$$p_m = \begin{cases} p_m^{(0)} & \text{en } \Omega_0, \\ p_m^{(1)} & \text{en } \Omega_1, \\ \vdots & \\ p_m^{(n-1)} & \text{en } \Omega_{n-1}\,. \end{cases}$$

con $p_m = 0$ en $\partial\Omega$, $p_m^{(k)} = p_m^{(k-1)}$ en Γ_k para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
De las definiciones anteriores tenemos que $u_m \bullet \eta = \alpha p_m + a q_m$ en S_0. Luego, $(u_m, p_m, q_m) \in D\,(A)$. Por lo tanto, $\overline{G} = D(A)$.
Sea $w = (u,p,q) \in G$, tomando el producto interno de Aw y w en $\mathcal{H}_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \left\langle \left(-\frac{1}{\beta} Grad\, p, -\frac{1}{\gamma} Div\, u, -\sigma q + p\right), (u,p,q) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega_k} \left\{ Grad\, p^{(k)} \bullet u^{(k)} + Div\, u^{(k)} p^{(k)} \right\} dx - \int_{S_0} a(x)\left(-\sigma q^2 + pq\right) d\Gamma \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial\Omega_k} u^{(k)} \bullet \eta p^{(k)} d\Gamma + \int_{S_0} a(x)\left(\sigma q^2 - pq\right) d\Gamma\,. \end{aligned} \tag{21}$$

De las condiciones en la frontera, $u^{(k-1)} \bullet \eta = u^{(k)} \bullet \eta$ y $p^{(k-1)} = p^{(k)}$ en Γ_k, $k \in \{0, 1, ...n-1\}$ entonces obtenemos

$$\int_{\Gamma_k} u^{(k-1)} \bullet \eta p^{(k-1)} d\Gamma - \int_{\Gamma_k} u^{(k)} \bullet \eta p^{(k-1)} \;=\; 0 \;, k \in \{1, 2, ..., n-1\}\;. \tag{22}$$

Usando (22) en (21) obtenemos

$$\langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}_0} = \int_{S_1} u^{(0)} \bullet \eta p^{(0)} d\Gamma - \int_{S_0} u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} d\Gamma - \int_{S_0} a(x)\left(\sigma q^2 - pq\right) d\Gamma\,. \tag{23}$$

También,

$$p^{(0)} = p = 0 \ en \ S_1 \ \text{ entonces } \int_{S_1} u^{(0)} \bullet \eta\, p^{(0)} d\Gamma = 0 \tag{24}$$

y

$$\begin{aligned} u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} = u \bullet \eta p = (\alpha p + a\, q)p = (\alpha p^2 + a\, p\, q) \text{ en } S_0 \\ \text{entonces } \int_{S_0} u^{(n-1)} \bullet \eta p^{(n-1)} d\Gamma = \int_{S_0} (\alpha p^2 + a\, p\, q) d\Gamma\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Reemplazando (24), (25) en (23) tenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}_0} &= -\int_{S_0} (\alpha p^2 + a\, p\, q) d\Gamma - \int_{S_0} a(x)\left(\sigma q^2 - p\, q\right) d\Gamma \\ &= -\int_{S_0} (\alpha p^2 + a\,\sigma\, q^2) d\Gamma \ \le \ 0 \quad, \forall w \in G\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Por densidad , tenemos que si $w \in D(A)$ entonces $\exists w_m \in G$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} w_m = w.$ Dado que $w_m \in G$ entonces de (26) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Aw_m, w_m\rangle_{\mathcal{H}_0} &\le 0\,, \\ \lim_{m\to\infty} \langle Aw_m, w_m\rangle_{\mathcal{H}_0} &\le 0\,, \\ \left\langle \lim_{m\to\infty} Aw_m, \lim_{m\to\infty} w_m \right\rangle_{\mathcal{H}_0} &\le 0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Como A es cerrado en $\mathcal{H}_0$ entonces $\lim\limits_{m\to\infty} Aw_m = Aw$. Por lo tanto en (27), tenemos

$$\langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}_0} \le 0. \tag{28}$$

De la ecuación (28), tenemos que A es disipativo. □

Calculos similares nos permiten probar que A^* es disipativo. En conclusión tenemos que A y A^* son operadores disipativos, y A es un operador cerrado definido densamente, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ (ver [9]). Así, la solucion única de (10) es

$$Y(t) := U(t)\, Y(0)\ .$$

REFERENCIAS

[1] G. DUVAUT AND J.-L. LIONS, *Les inéquations in Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, (1972).

[2] M. FABRIZIO AND A. MORRO, *A boundary condition with memory in electromagnetism*, Arch. Rational Mech. Anal., 136 (1996), pp. 359-381.

[3] GIRAULD,VIVETTE AND RAVIART, PIERRE-ARNAUD, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin and New York, (1979).

[4] B. V. KAPINOTOV AND G. PERLA MENZALA, *Uniform stabilization for Maxwell equations with boundary conditions with memory*, Asymptotic Analysis 26 (2001), pp. 91-104.

[5] J. E. LAGNESE, *Boundary controllability in problems of transmission for a class of second order hyperbolic systems*, ESAIM: Control, Optim. and Calculus of Variations, 2 (1997), pp. 343-357.

[6] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systémes distribués, Tome 1, Contrôlabilité exacte*, Coll. RMA, 8 (1988), Masson, Paris

[7] S. NICAISE, *Boundary exact controllability of interface problems with singularities. I: addition of the coefficients of singularities*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 1512-1532.

[8] S. NICAISE, *Boundary exact controllability of interface problems with singularities. II: addition of internal control*, SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 585-603.

[9] A. PAZY *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York,(1983).