

# MAT

Serie 

Conferencias, Seminarios  
y Trabajos de Matemática.

ISSN: 1515-4904

**19**

*VII Italian*

*Latin American*

*Conference on*

*Industrial and*

*Applied Mathematics*

*First Part*

*Domingo A. Tarzia (Ed.)*

Departamento  
de Matemática,  
Rosario,  
Argentina  
Octubre 2014

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



# MAT

## SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 19

### VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

First Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

#### INDICE

**Graciela M. Croceri - Graciela N. Sottosanto**, “Comparación de dos algoritmos de lagrangiano aumentado para el problema de optimización con restricciones de igualdad”, pp. 1-7.

**Martha Hilda Timoteo Sánchez - Yolanda Santiago Ayala**, “Sobre la existencia y unicidad de la solución de un modelo de propagación del sonido en un fluido compresible”, pp. 9-16.

**Carlos Andrés Trujillo-Salazar - Hernán Darío Toro-Zapata**, “Análisis teórico de la transmisión y el control del VIH/SIDA en un centro de reclusión”, pp. 17-26.

**Santiago C. Rojas Romero**, “Sobre el espectro de Fucik para un sistema acoplado”, pp. 27-34.

**Manuel Maurette**, “A topological approach to the repulsive central motion problem”, pp. 35-42.

Rosario, Octubre 2014

# ANÁLISIS TEÓRICO DE LA TRANSMISIÓN Y EL CONTROL DEL VIH EN UN CENTRO DE RECLUSIÓN

Trujillo-Salazar Carlos Andrés<sup>b</sup> y Toro-Zapata Hernán Darío<sup>b</sup>

<sup>b</sup>*Programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío, Carrera 15 calle 12 Norte, Armenia, Quindío, Colombia, www.uniquindio.edu.co*

**Resumen:** Se modela la transmisión del VIH en una cárcel para hombres, considerando transmisión de la enfermedad solo por vía sexual, tanto por contacto entre hombres internos, como por contacto de hombres internos con mujeres que acuden a visita conyugal. La población masculina se divide en internos susceptibles de adquirir la infección, internos portadores VIH sin diagnosticar e internos portadores VIH diagnosticados. La población de mujeres que efectúan visita conyugal se divide en mujeres susceptibles de adquirir la infección y mujeres infectadas con VIH. Se plantea un sistema de cinco ecuaciones diferenciales no lineales, que posteriormente se modifica incorporando un control preventivo en todas las tasas de transmisión. El objetivo es optimizar tal control empleando la técnica clásica del Principio del Máximo de Pontryagin. Esta técnica implica el planteamiento de un problema de contorno, que es simulado para obtener conclusiones y establecer medidas que en teoría, ayuden a mantener bajos niveles de internos infectados.

**Palabras clave:** *VIH, Centro de reclusión, Control óptimo, Problema de contorno*

2000 AMS Subject Classification: 93C15, 92C50, 92B05

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, uno de los retos más grandes para la salud pública a nivel mundial, consiste en la reducción de la transmisión del VIH; esto, debido entre otros factores, a su naturaleza de epidemia y a su impacto en la salud, en lo económico, en lo social y en lo político. En este orden de ideas, se han logrado identificar elementos que hacen a ciertos grupos poblacionales más vulnerables que otros frente a la infección por VIH. Estos factores pueden clasificarse en: epidemiológicos (mayor probabilidad de adquirir el VIH por el hecho de pertenecer a un grupo con una prevalencia más elevada), sociales (estar privado de atención médica y otros derechos), económicos (incapacidad de evitar el riesgo y de tener acceso a medicina y salud en general) y políticos (sus necesidades no son tenidas en cuenta en la formulación de políticas y proyectos). De acuerdo con lo anterior, se pueden distinguir diferentes grupos poblacionales que podrían considerarse como de mayor vulnerabilidad frente al VIH, entre ellos, las personas privadas de libertad en las cárceles. Resulta entonces pertinente estudiar y plantear estrategias de control para el VIH teniendo como escenario un centro de reclusión [8], [9].

La relevancia del estudio de la dinámica de transmisión del VIH en los centros de reclusión colombianos se fundamenta en varios factores, pero se hace especial énfasis en dos de ellos. El primero tiene que ver con el panorama poco alentador que dejó en evidencia la Defensoría del Pueblo colombiana en el año 2010, cuando presentó un informe sobre la ejecución del decreto 1141 de 2009 (reglamentación de la afiliación de la población reclusa al Sistema General de Seguridad Social en Salud), en el cual manifiesta que la prestación de los servicios de salud en términos de acciones preventivas, terapéuticas y rehabilitadoras corresponden a la principal falla del INPEC (Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario), organismo encargado de los asuntos carcelarios en Colombia [4]. El segundo factor tiene que ver con las visitas conyugales en las cárceles masculinas, para lo cual el INPEC establece todos los domingos como días permitidos para este tipo de visitas, a excepción del primer domingo de cada mes, el cual se destina para la visita de niños y por lo tanto se impide el acceso a las celdas por parte de los visitantes.

Teniendo en cuenta lo anterior y conociendo la importancia que tiene el modelado matemático en el estudio de epidemias, se realiza un análisis de la dinámica de transmisión del VIH en un centro de reclusión para hombres, utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias. Es importante resaltar, que el modelado matemático ha hecho aportes significativos al campo epidemiológico, al menos desde lo teórico. Para corroborar esta aseveración, puede consultarse un trabajo clásico como [2], o algunos más recientes tales como [1] y [7].

## 2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Se modela la transmisión del VIH en un centro de reclusión para hombres y se tiene en cuenta el efecto que las visitas conyugales puedan tener en la dinámica de la enfermedad. La población se considera dividida en internos susceptibles de adquirir la infección  $v = v(t)$ , internos portadores del VIH sin diagnosticar  $w = w(t)$ , internos portadores del VIH diagnosticados  $x = x(t)$ . De manera semejante, se asume que la población de mujeres en visita conyugal se divide en mujeres susceptibles de adquirir la infección  $y = y(t)$  y mujeres infectadas con VIH,  $z = z(t)$ .

En el modelo se considera que la enfermedad se transmite solo por vía sexual; así, los internos susceptibles pueden adquirir la infección por contacto con mujeres infectadas con una probabilidad  $\rho$  y por contacto con internos portadores sin diagnosticar con una probabilidad  $\beta$ . Del mismo modo, las mujeres susceptibles pueden adquirir el virus por contacto sexual con internos portadores sin diagnosticar con una probabilidad  $\psi$ . Se denota con  $\theta$  la tasa de diagnóstico.

Un supuesto importante es que la tasa de crecimiento de las mujeres en visita es igual a la tasa de ingreso de los internos  $\Delta$ ; esto indica que cada interno que es recluido "llega" con su compañera, y del mismo modo cuando el interno es liberado o trasladado, ella se va con él a una tasa de liberación o traslado  $\mu$ . Con estos supuestos, el modelo toma la forma

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \Delta - \beta vw - \rho vz - \mu v \\ \frac{dw}{dt} = \beta vw + \rho vz - \phi w \\ \frac{dx}{dt} = \theta w - \mu x \\ \frac{dy}{dt} = \Delta - \psi wy - \mu y \\ \frac{dz}{dt} = \psi wy - \mu z, \end{cases} \quad (1)$$

con condiciones iniciales  $v(0) = v_0$ ,  $w(0) = w_0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  y  $z(0) = z_0$  y donde  $\phi = \theta + \mu$ . Todos los parámetros del modelo son positivos.

**Proposición 2.1** *La región  $\Omega = \{(v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 : 0 \leq v + w + x \leq \frac{\Delta}{\mu}, 0 \leq y + z \leq \frac{\Delta}{\mu}\}$  es una región de invarianza para el sistema (1).*

## 3. ANÁLISIS DEL MODELO SIN CONTROL

### 3.1. SOLUCIONES ESTACIONARIAS

Para determinar las soluciones estacionarias, se resuelve el sistema algebraico que resulta de igualar a cero, el lado derecho de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema (1), con lo cual se obtienen, la solución trivial

$$E_0 = \left( \frac{\Delta}{\mu}, 0, 0, \frac{\Delta}{\mu}, 0 \right) \quad (2)$$

y la solución no trivial  $E_1 = (\bar{v}, \bar{w}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v})}{\psi\mu(\phi - \beta\bar{v})} & \bar{x} &= \frac{\theta(\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v}))}{\psi\mu^2(\phi - \beta\bar{v})} \\ \bar{y} &= \frac{\mu(\phi - \beta\bar{v})}{\rho\psi\bar{v}} & \bar{z} &= \frac{\rho\psi\Delta\bar{v} - \mu^2(\phi - \beta\bar{v})}{\rho\psi\mu\bar{v}} \end{aligned}$$

y  $\bar{v}$  es la solución de la ecuación cuadrática

$$a_2\bar{v}^2 + a_1\bar{v} + a_0 = 0, \quad (3)$$

donde

$$a_2 = \mu^2\psi\beta, \quad a_1 = -[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)], \quad a_0 = \mu^2\phi^2 + \Delta\mu\psi\phi.$$

**Proposición 3.1** *Es condición suficiente que  $\beta > \psi$  para que las soluciones de la ecuación (3) sean reales y positivas.*

*Prueba.* Empleando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas en la ecuación (3), se obtienen las soluciones

$$\bar{v} = \frac{\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta) \pm \sqrt{[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)]^2 - 4\mu^4\phi^2\psi\beta - 4\mu^3\psi^2\beta\phi\Delta}}{2\mu^2\psi\beta}. \quad (4)$$

El radicando de (4) se puede reexpresar como

$$\mu^4\phi^2(\beta - \psi)^2 + 2\mu^2\phi\psi\Delta[\phi\rho(\beta + \psi) + \mu\beta(\beta - \psi)] + \Delta^2\psi^2(\rho\phi + \mu\beta)^2,$$

el cual es positivo para todos los valores de los parámetros si  $\beta > \psi$ . Bajo este resultado, la positividad de las soluciones es evidente de (4), ya que

$$\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta) \geq \sqrt{[\mu^2\phi(\beta + \psi) + \Delta\psi(\rho\phi + \mu\beta)]^2 - 4\mu^4\phi^2\psi\beta - 4\mu^3\psi^2\beta\phi\Delta}.$$

□

**Observación 3.1** *De acuerdo con la proposición 3.1, es posible que la ecuación (3) tenga soluciones reales positivas, lo que implica la posible existencia de dos puntos de equilibrio no triviales. Sin embargo, el estudio de estabilidad se concentra alrededor del punto de equilibrio trivial  $E_0$  (2), dada su relación con el número básico de reproducción.*

### 3.2. NÚMERO BÁSICO DE REPRODUCCIÓN

Una forma de estudiar el comportamiento de la enfermedad, es analizando el *número básico de reproducción*, denotado por  $R_0$  y definido según [6], como el número de casos secundarios que son producidos por un individuo contagiado en una población enteramente susceptible. Para determinar el número básico de reproducción se ha utilizado el *método de la matriz de la siguiente generación*, descrito en numerosos trabajos de epidemiología matemática, como por ejemplo [3]. Para ello, se tienen en cuenta las ecuaciones diferenciales correspondientes a las poblaciones infecciosas y se definen los siguientes vectores

$$f = \begin{bmatrix} \beta vw + \rho vz \\ 0 \\ \psi wy \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \phi w \\ -\theta w + \mu x \\ \mu z \end{bmatrix}.$$

Para los cuales se calculan las matrices jacobianas con respecto a las variables  $w, x$  y  $z$ , dando por resultado

$$Df = \begin{bmatrix} \beta v & 0 & \rho v \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Dg = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ -\theta & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

De donde se obtienen las matrices  $F$  y  $G$ , dadas por  $F = Df(E_0)$  y  $G = (Dg)^{-1}$ , es decir,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta\Delta}{\mu} & 0 & \frac{\rho\Delta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi\Delta}{\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi} & 0 & 0 \\ \frac{\theta}{\mu\phi} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}.$$

El número básico de reproducción de la enfermedad está dado por el radio espectral de la matriz de la siguiente generación, es decir, el mayor de los valores absolutos de los valores propios de la matriz  $FG$ . Esto es

$$\tilde{R}_0 = \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2}. \quad (5)$$

**Proposición 3.2** *El número básico de reproducción de la enfermedad (5) satisface que*

$$\tilde{R}_0 = \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2} < 1 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu} < 1.$$

*Prueba.*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta \mu + \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu}}{2 \phi \mu^2} < 1 &\iff \sqrt{\beta^2 \mu^2 + 4\phi \rho \psi \mu} < \frac{2\mu^2 \phi - \beta \mu \Delta}{\Delta} \\ &\iff \rho \psi \Delta^2 < \mu^3 \phi - \mu^2 \beta \Delta \\ &\iff \frac{\rho \psi \Delta^2}{\mu^3 \phi} + \frac{\beta \Delta}{\mu \phi} < 1 \\ &\iff \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu} < 1. \end{aligned}$$

□

**Definición 3.1** *El número básico de reproducción  $R_0$  está dado por*

$$R_0 = R_m \cdot R_h + R_g = \frac{\psi \Delta}{\mu \mu} \cdot \frac{\rho \Delta}{\phi \mu} + \frac{\beta \Delta}{\phi \mu}, \quad (6)$$

donde  $R_m$  representa el aporte de la población de mujeres al  $R_0$ . Así mismo,  $R_h$  y  $R_g$  corresponden al aporte de la población de hombres al  $R_0$ . Nótese que las tres expresiones presentan la forma característica de la epidemiología, es decir, un cociente entre tasas de entrada y tasas de salida. Los efectos aditivos y multiplicativos en  $R_0$  son resultado de haber considerado múltiples vías de infección.

### 3.3. ESTABILIDAD LOCAL

**Proposición 3.3** *Si  $R_0 < 1$ , entonces el punto de equilibrio trivial  $E_0$  descrito en (2) es local y asintóticamente estable.*

*Prueba.* La matriz jacobiana del sistema está dada por

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\beta w - \rho z - \mu & -\beta v & 0 & 0 & -\rho v \\ \beta w + \rho z & \beta v - \phi & 0 & 0 & \rho v \\ 0 & \theta & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\psi y & 0 & -\psi w - \mu & 0 \\ 0 & \psi y & 0 & \psi w & -\mu \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Y al evaluar la matriz jacobiana (7) en el punto de equilibrio (2), se obtiene la matriz

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta \frac{\Delta}{\mu} & 0 & 0 & -\rho \frac{\Delta}{\mu} \\ 0 & \beta \frac{\Delta}{\mu} - \phi & 0 & 0 & \rho \frac{\Delta}{\mu} \\ 0 & \theta & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\psi \frac{\Delta}{\mu} & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \psi \frac{\Delta}{\mu} & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico está dado por

$$p(r) = \frac{1}{\mu^2}(\mu + r)^3 \left( r^2 + \left( \phi + \mu - \frac{\beta\Delta}{\mu} \right) r + \left( \mu\phi - \beta\Delta - \frac{\rho\psi\Delta^2}{\mu^2} \right) \right).$$

Este polinomio de grado 5 presenta la raíz  $r = -\mu$  de multiplicidad 3 y según el criterio de Routh-Hurwitz, las dos raíces del polinomio de segundo grado tienen parte real negativa si son positivos tanto el coeficiente del término lineal, como el término independiente, es decir, si se satisfacen las siguientes condiciones

$$\phi + \mu - \frac{\beta\Delta}{\mu} > 0 \quad \text{y} \quad \mu\phi - \beta\Delta - \frac{\rho\psi\Delta^2}{\mu^2} > 0.$$

Condiciones que se pueden escribir de manera equivalente como

$$\mu^2 + \mu\phi \left( 1 - \frac{\beta\Delta}{\mu\phi} \right) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\psi}{\mu} \frac{\Delta}{\mu} \cdot \frac{\rho}{\phi} \frac{\Delta}{\mu} + \frac{\beta\Delta}{\mu\phi} < 1.$$

La segunda condición es exáctamente  $R_0 < 1$  y su satisfacción implica que  $\frac{\beta\Delta}{\mu\phi} < 1$ , permitiendo que también se cumpla la primera condición. □

### 3.4. SIMULACIONES

Se realizan las simulaciones del modelo (1) teniendo en cuenta los valores mostrados en la tabla 1. Sin embargo, se consideran diferentes valores para las probabilidades de contagio  $\beta$ ,  $\rho$  y  $\psi$ . Los comportamientos exhibidos en la figuras 1 y 2 son semejantes conforme se van incrementando los valores de los parámetros  $\beta$  y  $\rho$ . Se observa que el número de internos susceptibles disminuye a niveles entre el 75 % y el 100 %. La cantidad de internos no diagnosticados presenta un pico característico en este tipo de modelado, pero termina por estabilizarse alrededor de los 300 individuos, lectura preocupante si se tiene en cuenta que en este caso la condición inicial fue de un individuo. La población de mujeres susceptibles describe un comportamiento sin variaciones profundas, ya que a pesar de los picos mostrados, la reducción en el número de individuos no sobrepasa el 25 %. Las lecturas más críticas obedecen al número de internos diagnosticados y de mujeres infectadas, debido a que se inició la simulación con valores nulos y terminan por alcanzar los 375 y 450 individuos, respectivamente.

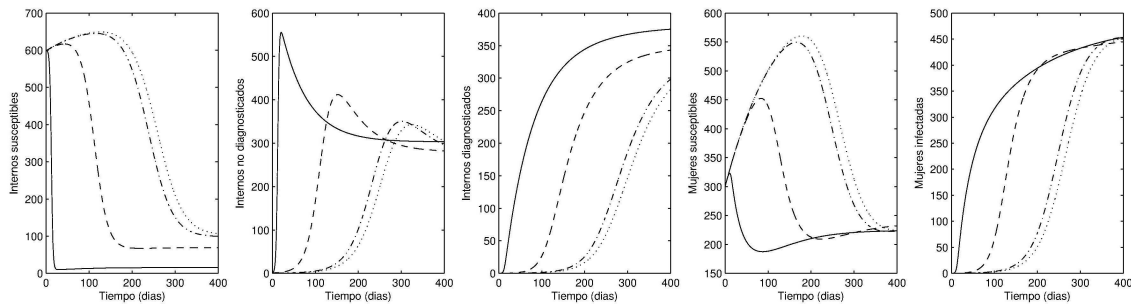
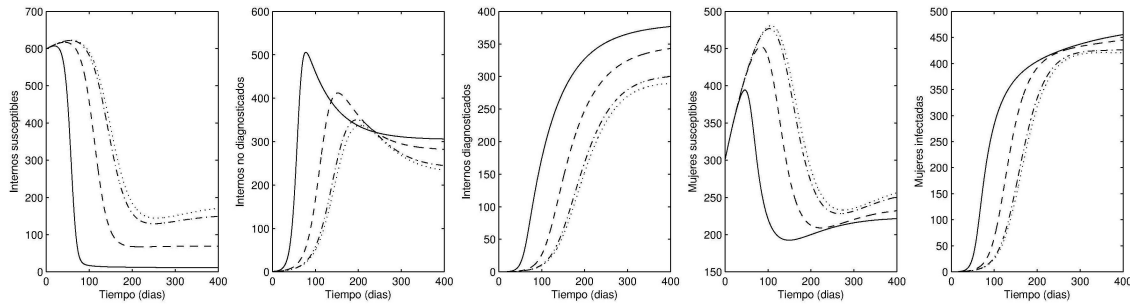
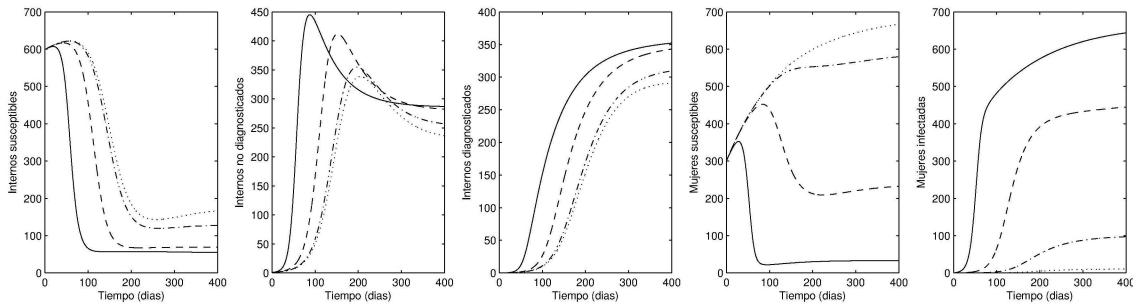


Figura 1: Soluciones del sistema (1) variando  $\beta$ .  $\beta = 9 \times 10^{-7}$  (Puntos),  $\beta = 9 \times 10^{-6}$  (Guiones y puntos),  $\beta = 9 \times 10^{-5}$  (Guiones) y  $\beta = 9 \times 10^{-4}$  (Línea continua).

El comportamiento observado en la figura 3 es semejante a lo comentado anteriormente, por lo menos en lo que respecta a las poblaciones de internos susceptibles e internos portadores con y sin diagnóstico. Sin embargo, y como era de esperarse, los cambios significativos se presentan en las poblaciones de mujeres, debido a los diferentes valores considerados para  $\psi$ , la tasa de contagio entre mujeres susceptibles e internos infectados sin diagnosticar. Tales modificaciones se traducen en una disminución drástica del número de mujeres susceptibles y un crecimiento representativo del número de mujeres infectadas, a medida que aumenta la magnitud de  $\psi$ .

Tabla 1: Condiciones iniciales y valores de los parámetros usados en la simulación para las figuras 1 a 6.

Parámetro	Descripción	Valor
$v_0$	Valor inicial de los internos susceptibles (IS)	599
$w_0$	Valor inicial de los internos port. sin diagn. (IPsD)	1
$x_0$	Valor inicial de los internos port. diagn. (IPD)	0
$y_0$	Valor inicial de las mujeres en visita suscep. (MvS)	300
$z_0$	Valor inicial de las mujeres en visita portad. (MvP)	0
$\Delta$	Tasa de ingreso de los internos	5
$\mu$	Tasa de traslado o liberación en el CR	5/700
$\beta$	Probabilidad de contagio entre IS e IPsD	$9 \times 10^{-5}$
$\rho$	Probabilidad de contagio entre IS y MvP	$9 \times 10^{-5}$
$\psi$	Probabilidad de contagio entre MvS e IPsD	$5 \times 10^{-5}$
$\theta$	Tasa de diagnóstico de la enfermedad	0.009

Figura 2: Soluciones del sistema (1) variando  $\rho$ .  $\rho = 9 \times 10^{-7}$  (Puntos),  $\rho = 9 \times 10^{-6}$  (Guiones y puntos),  $\rho = 9 \times 10^{-5}$  (Guiones) y  $\rho = 9 \times 10^{-4}$  (Línea continua).Figura 3: Soluciones del sistema (1) variando  $\psi$ .  $\psi = 5 \times 10^{-7}$  (Puntos),  $\psi = 5 \times 10^{-6}$  (Guiones y puntos),  $\psi = 5 \times 10^{-5}$  (Guiones) y  $\psi = 5 \times 10^{-4}$  (Línea continua).

De acuerdo con las observaciones anteriores, es posible afirmar que si se desea disminuir el número de infectados masculinos, entonces no es suficiente con mantener bajas las probabilidades de contagio  $\beta$  y  $\rho$ , de manera independiente, como se realizaron las simulaciones. No obstante, en el caso de las mujeres resulta evidente la eficacia de reducir el valor de  $\psi$ , con el ánimo de disminuir el número de mujeres infectadas.

#### 4. ANÁLISIS DEL MODELO CON CONTROL

Se considera nuevamente el modelo inicial (1), pero ahora aplicando control ( $u$ ) sobre las probabilidades de contagio  $\beta$ ,  $\rho$  y  $\psi$ , con lo que se obtiene el nuevo sistema:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \Delta - \beta(1-u)vw - \rho(1-u)vz - \mu v \\ \frac{dw}{dt} = \beta(1-u)vw + \rho(1-u)vz - \phi w \\ \frac{dx}{dt} = \theta w - \mu x \\ \frac{dy}{dt} = \Delta - \psi(1-u)wy - \mu y \\ \frac{dz}{dt} = \psi(1-u)wy - \mu z. \end{array} \right. \quad (8)$$

En el modelo (8) debe tenerse en cuenta que  $u = 0$  significa que no se aplica control y  $u = 1$  indica que el control es 100 % efectivo. El control se aplica sobre las probabilidades de contagio  $\beta$ ,  $\rho$  y  $\psi$ , con la intención de reducir tales probabilidades de manera simultánea y con esto, disminuir significativamente el número promedio de todas las poblaciones infectadas. Porque como se observó en las simulaciones anteriores, la reducción de las probabilidades de manera independiente no genera efectos positivos en las tres poblaciones de infectados.

A continuación se define el número básico de reproducción en términos del control, denotado ahora por  $R_0(u)$ , mediante el cual se establecen dos proposiciones relacionadas con la estabilidad del equilibrio trivial  $E_0$ . La primera corresponde a la desigualdad estricta sobre la unidad. Y la segunda tiene que ver con el mínimo control que debe aplicarse para garantizar la satisfacción de tal desigualdad.

**Definición 4.1** El número básico de reproducción  $R_0(u)$  está dado por

$$\begin{aligned} R_0(u) &= R_m(u) \cdot R_h(u) + R_g(u) \\ &= \frac{\psi(1-u)}{\mu} \frac{\Delta}{\mu} \cdot \frac{\rho(1-u)}{\phi} \frac{\Delta}{\mu} + \frac{\beta(1-u)}{\phi} \frac{\Delta}{\mu}. \end{aligned} \quad (9)$$

**Proposición 4.1**  $R_0(u) < 1$  implica que el equilibrio trivial  $E_0$  es local y asintóticamente estable.

**Proposición 4.2** Si  $u > u_c$ , entonces  $R_0(u) < 1$ , donde

$$u_c = 1 - \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{\beta\mu^2}{\psi\rho\Delta} \right)^2 + \frac{4\mu^3\phi}{\psi\rho\Delta^2}} - \frac{\beta\mu^2}{\psi\rho\Delta} \right]. \quad (10)$$

De ahora en adelante la expresión (10) se llamará *umbral de control constante* y su importancia radica en la determinación del valor mínimo que debe asumir el control para garantizar que  $R_0(u) < 1$  y por lo tanto, implicar que el equilibrio trivial  $E_0$  sea local y asintóticamente estable. Esta idea se ilustra en las figuras 4 y 5, las cuales corresponden a las simulaciones del modelo (8) y que se efectuaron teniendo en cuenta los valores mostrados en la tabla 1. Valores para los cuales se obtiene  $u_c = 0,8516$ .

En la figura 4 se evidencia que con la aplicación de control en cantidades menores a  $u_c$ , no se logra la erradicación de la enfermedad; aparentemente los resultados son buenos con la aplicación del control a un 70 %, pero finalizando el tiempo de simulación se observa un inminente crecimiento de las poblaciones de infectados. Para la figura 5 se ha considerado un mayor tiempo de simulación y también valores del control muy cercanos a  $u_c$ , tanto por exceso, como por defecto; en ella se observa que cuando se aplica control en magnitudes menores al umbral  $u_c$ , se logra retrasar el brote de la enfermedad y disminuir su intensidad. En cualquier caso, ambas gráficas permiten notar que la enfermedad desaparece cuando el control administrado excede al umbral  $u_c = 0,8516$ , que en este caso resulta ser muy alto, entendido como de 85 % aproximadamente.

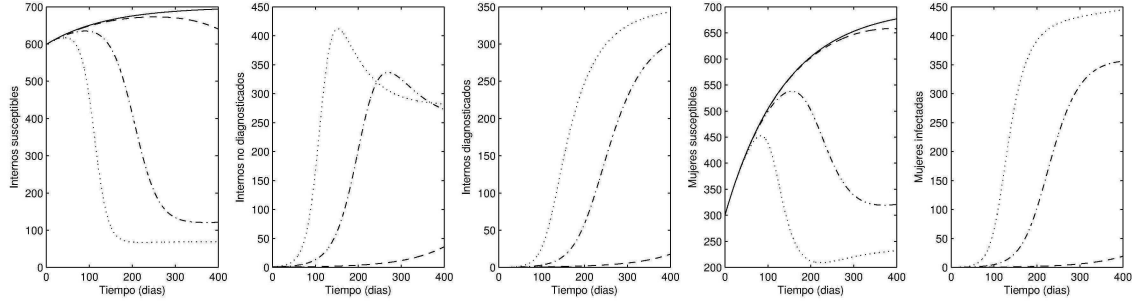


Figura 4: Variación del control constante.  $u = 0$  (Puntos),  $u = 0,4$  (Guiones y puntos),  $u = 0,7$  (Guiones),  $u = 0,9$  (Línea continua) y  $u_c = 0,8516$ .

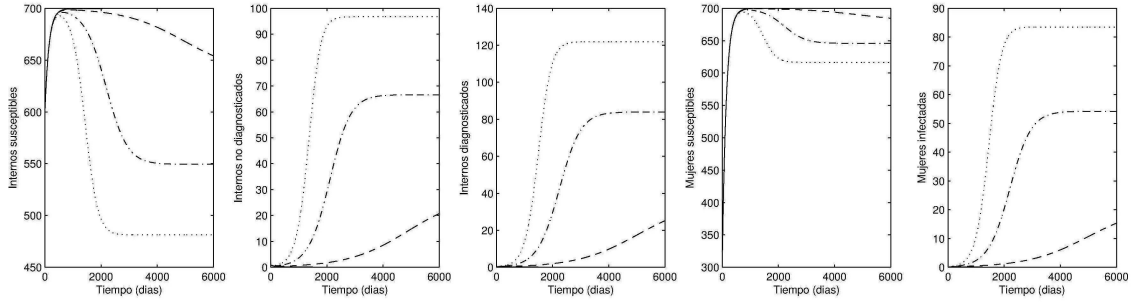


Figura 5: Variación mínima del control constante.  $u = 0,80$  (Puntos),  $u = 0,82$  (Guiones y puntos),  $u = 0,84$  (Guiones),  $u = 0,86$  (Línea continua) y  $u_c = 0,8516$ .

## 5. PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

La sección anterior puso de manifiesto la necesidad de la aplicación de control de manera constante y en porcentajes superiores al 85 %. Se desea ahora determinar un tipo de control que varíe con el tiempo, pero cuyos resultados, respecto a la disminución del número promedio de infectados, sean óptimos. Para ello se plantea una funcional de costos en términos de  $w$ ,  $z$ , un control  $u$  y su respectivo ponderador  $A$ . Se denota tal funcional por  $C$  y corresponde a

$$C(u) = \int_0^\tau \left( w + z + \frac{A}{2} u^2 \right) dt,$$

sujeta al problema de valor inicial conformado por el sistema (8) y las condiciones iniciales  $v(0) = v_0$ ,  $w(0) = w_0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  y  $z(0) = z_0$ . El objetivo es determinar una función óptima  $\tilde{u} \in \Gamma$  tal que  $\min\{C(u)\} = C(\tilde{u})$ , donde  $\Gamma = \{u|u \in L^2([0, \tau])\}$  es el conjunto de controles admisibles. Según el principio de máximo de Pontryagin, minimizar la funcional  $C$  es equivalente a minimizar la función auxiliar

$$\begin{aligned} H = & w + z + \frac{A}{2} u^2 + L_1 [\Delta - \beta(1-u)vw - \rho(1-u)vz - \mu v] \\ & + L_2 [\beta(1-u)vw + \rho(1-u)vz - \phi w] + L_3 [\theta w - \mu x] \\ & + L_4 [\Delta - \psi(1-u)wy - \mu y] + L_5 [\psi(1-u)wy - \mu z] \\ & + M_1 u + M_2 (1-u). \end{aligned}$$

Donde  $M_1$  y  $M_2$  son cantidades de penalización no negativas, que satisfacen,

$$M_1 u = 0 \quad y \quad M_2 (1-u) = 0 \quad (11)$$

y las variables  $L_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , son variables adjuntas que satisfacen el problema de valor final

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_1}{dt} = (1-u)(L_1-L_2)(\beta w + \rho z) + \mu L_1 \\ \frac{dL_2}{dt} = \beta(1-u)(L_1-L_2)v + \psi(1-u)(L_4-L_5)y + \phi L_2 - \theta L_3 - 1 \\ \frac{dL_3}{dt} = \mu L_3 \\ \frac{dL_4}{dt} = \psi(1-u)(L_4-L_5)w + \mu L_4 \\ \frac{dL_5}{dt} = \rho(1-u)(L_1-L_2)v + \mu L_5 - 1, \end{array} \right. \quad (12)$$

con las condiciones finales  $L_i(\tau) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Para caracterizar el control óptimo basta con resolver para  $u$ , la condición de primer orden  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , de manera explícita

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Au + (L_1 - L_2)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_4 - L_5)wy + M_1 - M_2 = 0.$$

Con lo que se tiene

$$u = \frac{(L_2 - L_1)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_5 - L_4)wy}{A}.$$

Y usando la condición de penalización dada en (11), se deduce que una forma adecuada de caracterizar el control  $\tilde{u}$  es

$$\tilde{u} = \max \left( 0, \min \left( \frac{(L_2 - L_1)(\beta w + \rho z)v + \psi(L_5 - L_4)wy}{A}, 1 \right) \right). \quad (13)$$

Teoría de control óptimo aplicada a epidemias, como la descrita anteriormente, se puede encontrar, entre otros trabajos, en [5].

El efecto que tiene el control óptimo sobre la dinámica del modelo, se observa en la figura 6, la cual es el resultado de realizar la simulación del problema de contorno formado por (8), (12) y (13), con condiciones iniciales  $v(0) = v_0$ ,  $w(0) = w_0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$  y con condiciones finales  $L_i(\tau) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Los valores de los parámetros se conservan con respecto a las simulaciones anteriores. Se observa entonces en la figura 6 los excelentes resultados que arroja la aplicación del control óptimo, traducidos en la disminución de la cantidad de infectados, cuando se reduce el valor del ponderador  $A$ . Esto se debe a que  $A$  es el denominador de (13) y en términos monetarios, reduce su costo. Nótese además, que en la gráfica del control  $u$  (control óptimo), los valores siempre son menores que el valor del control constante  $u_c$ . El aumento de la población total de internos de 600 a 695 en los 400 días considerados, tiene que ver con la consideración de la tasa de ingreso de los internos como constante, en la tabla 1 se muestra que  $\Delta = 5$ .

## 6. DISCUSIÓN

- Desde el punto de vista epidemiológico, el escenario poblacional más ideal se presenta cuando las poblaciones de infectados son muy bajas, lo que se consigue cuando  $R_0 < 1$ . Esta desigualdad se tradujo en términos de control como  $u > u_c$ , donde  $u_c$  corresponde a un umbral de control constante. A la luz de los resultados, se advierte sobre la necesidad de la aplicación permanente de un control preventivo con altas tasas de efectividad ( $u_c = 0,8516$ ), pues de lo contrario los brotes de la infección son inevitables.
- La disminución de dos de las tres probabilidades de transmisión  $\beta$ ,  $\rho$  o  $\psi$ , no es una medida suficiente para reducir los niveles de poblaciones infectadas. De ahí la necesidad de administrar control  $u$  sobre las tres probabilidades de contagio. Se halló un umbral de control constante  $u_c$  y se mostró numéricamente que cuando se aplica control en cantidades que superen este umbral, se obtiene la reducción anhelada. Pero además, se determinó un control óptimo  $\tilde{u}$  que también permite alcanzar tal reducción y que presenta dos ventajas respecto de su aplicación: la primera es que no necesita ser constante, dada su variación en el tiempo; y la segunda es que sus valores son menores al umbral de control constante.

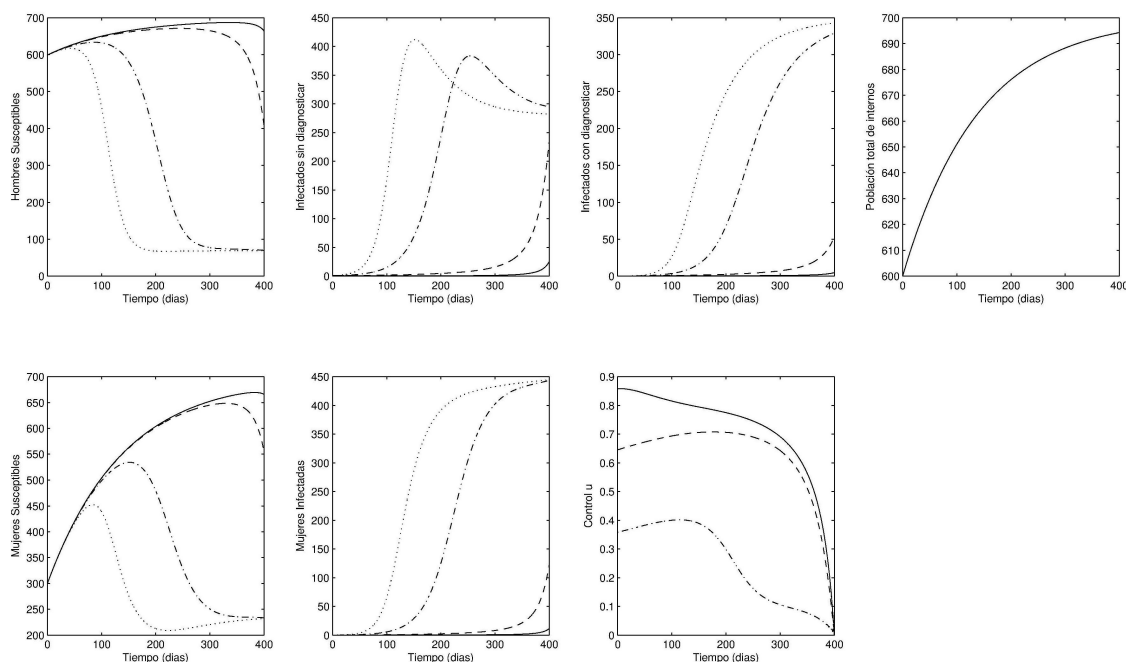


Figura 6: Simulación del modelo con control óptimo. Sin control (Puntos),  $A = 2500$  (Guiones y puntos),  $A = 1000$  (Guiones) y  $A = 100$  (Línea continua).

## REFERENCIAS

- [1] R.M. ANDERSON, *The populations dynamics of infectius diseases: Theory and applications*, Champan and Hall, 1982.
- [2] N.T.J. BAILEY, *The mathematical theory of infectius diseases*, Hafner Press, 1957.
- [3] G. CHOWEL, P. DIAZ-DUEÑAS, J.C. MILLER, A. ALCAZAR-VELAZCO, J.M. HYMAN, P.W. FENIMORE, ET AL., *Estimation of the reproduction number of dengue fever from spatial epidemic data*, *Mathematical Biosciences*, 208 (2007), pp. 571-589.
- [4] DEFENSORÍA DEL PUEBLO DE COLOMBIA, *Defensoría delegada para la política criminal y Penitenciaria. Informe sobre ejecución decreto 1141 de 2009*, Santa Fé de Bogotá, 2010.
- [5] D. GREENHALGH, *Some results on optimal control applied to epidemics*, *Mathematical Biosciences*, 88 (1986), pp. 125-158.
- [6] H. HEESTERBEEK,  $R_0$ , Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1992.
- [7] H. HETHCOTE, *The Mathematics of Infectious Diseases*, *SIAM Review*, Vol. 42, No. 4 (2000), pp. 599-653.
- [8] MINISTERIO DE SALUD, *Boletín informativo sobre Colombia ante la UNGASS. Liga Colombiana de Lucha contra el SIDA*, RECOLVIH, 2001.
- [9] MINISTERIO DE SALUD, *Lineamientos para la Política Sexual y Reproductiva*, Documento técnico No. 1, 1998.