MAT

Serie A

Conferencias, Seminarios y Trabajos de Matemática.

ISSN(Print)1515-4904
ISSN(Online)2468-9734

20

VII Italian Latin American Conference on Industrial and Applied Mathematics

Second Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

Departamento de Matemática, Rosario, Argentina
Julio 2015

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN (Print) 1515-4904
ISSN (Online) 2468-9734

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 20

VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

Second Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

Rosario, Julio 2015

MAT - Serie A, 20 (2015), 1-8

SOBRE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA ELÁSTICO DINÁMICO EN CRISTALES CÚBICOS

Yolanda S. Santiago Ayala[♭]

[♭]*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, yssantiago@gmail.com, ysantiagoa@unmsm.edu.pe, www.unmsm.edu.pe*

Resumen: Probamos la existencia de solución global del sistema elástico dinámico relativo a cristales cúbicos usando la Teoría de Operadores maximales monótonos y el Teorema de Minty-Browder. Así, usando técnicas multiplicativas, resultados de Dautry R. - Lions J. L., Desigualdades integrales no lineales, y adaptando el método de F. Conrad y B. Rao en el cálculo de las estimativas, mostramos que la energía asociada al sistema decae a cero cuando $t \to +\infty$. Aquí vemos dos casos uno con tasa exponencial y la otra con tasa polinomial.

Palabras clave: *Desigualdades integrales no linelaes, estabilidad de un sistema elástico dinámico, el método de Conrad y Rao.*
2000 AMS Subject Classification: 47B44,35L90.

1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos la existencia y la estabilidad para un sistema elástico dinámico relativo a cristales cúbicos. Basandonos en Desigualdades Integrales no lineales, desarrollados en la sección 2, presentamos la estabilidad en dos casos, una con tasa exponencial y la otra con tasa polinomial.

Lagnese en [8] obtiene resultados de decrecimiento uniforme de la energía del sistema elástico con control lineal $f(u')$ mas condiciones técnicas sobre el tensor de elasticidad, pero esto no es posible aplicar al sistema elástico homogéneo Isotrópico Lineal (SEHIL). En [9] Lagnese consigue estimativas de decrecimiento uniforme de la energía para el SEHIL bidimensional con control no lineal $f(u')$ mas un suavizante lineal. Por otro lado, Komornik en [7] mostró el resultado [9] sin el suavizante lineal para el caso N=2,3, sometidos a una fuerza que depende linealmente de la velocidad.

Para fundamentar nuestro estudio podemos citar Feynman [6] y Ciarlet [1]. También es importante citar a Dafermos [4], uno de los pioneros en el estudio del comportamiento asintótico de soluciones de ecuaciones de evolución no lineal.

Es interesante también citar los trabajos [3], [5], [10], [11] y [12], donde se abordan el comportamiento asintótico de algunos sistemas de evolución.

2. DESIGUALDADES INTEGRALES NO LINEALES

Lema 1 (Desigualdad Integral tipo Gronwall) *Sea $E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función no creciente y supongamos que exista una constante $T > 0$ tal que*

$$\int_t^{+\infty} E(s)ds \leq TE(t)\,, \quad \forall t \geq 0 \tag{1}$$

entonces

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}}\,, \quad \forall t \geq T\,. \tag{2}$$

Prueba. Si $E(0) = 0$ y como $0 \leq E(t) \leq E(0)$ para $t \geq 0$, entonces $E(t) = 0$. Antes de continuar con la prueba, daremos algunas observaciones:

Nota 1 *Se verifica fácilmente que "la desigualdad (2) también es válida para $0 \leq t < T$".*

En efecto, si $0 < s < T$, entonces $E(s) \leq E(0) \neq 0$ entonces $\frac{E(s)}{E(0)} \leq 1 = e^0 < e^{1-\frac{s}{T}}$, desde que $s < T$. Por lo tanto, $E(s) < E(0)e^{1-\frac{s}{T}}$, para $0 \leq s < T$.

Nota 2 *La desigualdad (2) implica que $E(t) \leq E(0)$, $\forall t \geq 0$.*

En efecto, como $t \geq T$ entonces $\frac{t}{T} \geq 1$, i.e. $1 - \frac{t}{T} \leq 0$, así $e^{1-\frac{t}{T}} \leq 1$ y $E(0)e^{1-\frac{t}{T}} \leq E(0)$. Usando (2), tenemos $E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{T}} \leq E(0)$.

Nota 3 *Se observa fácilmente, desde que E es no creciente, que si $0 \leq s \leq T$ entonces $E(s) \leq E(0)$.*

Prueba del Lema

Definimos
$$f(x) := e^{\frac{x}{T}} \int_x^{+\infty} E(s)ds\,.$$
Entonces de (1), tenemos
$$f(t) \leq e^{\frac{t}{T}} T E(t)\,,\ \forall t \geq 0\,. \tag{3}$$
También, f es no creciente, i.e. $f'(x) \leq 0$. En efecto,
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{T} e^{\frac{x}{T}} \int_x^{\infty} E(s)ds - e^{\frac{x}{T}} E(x) \;=\; \frac{e^{\frac{x}{T}}}{T} \left\{ \int_x^{+\infty} E(s)ds - TE(x) \right\} \leq 0$$
desde que vale (1).
Por otro lado, como f es no-creciente y vale (3) tenemos que $f(x) \leq f(0) \leq TE(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, luego $e^{\frac{x}{T}} \int_x^{+\infty} E(s)ds \leq TE(0)$, i.e.
$$\int_x^{+\infty} E(s)ds \leq e^{-\frac{x}{T}} TE(0)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,. \tag{4}$$
Como E es no creciente y positiva, al integrar E sobre $[x, x+T]$ tenemos que $TE(x+T) \leq \int_x^{x+T} E(s)ds$ y como $\int_x^{x+T} E(s)ds \leq \int_x^{+\infty} E(s)ds$, tenemos:
$$TE(x+T) \leq \int_x^{+\infty} E(s)ds\,. \tag{5}$$
De (4) y (5) tenemos:
$$TE(x+T) \leq Te^{-\frac{x}{T}} E(0)\,.$$
Tomando: $t = x + T$, tenemos:
$$E(t) \leq e^{1-\frac{t}{T}} E(0)\,.$$
$\square$

Teorema 1 (Desigualdad Integral no lineal) *Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función no creciente y supongamos que existan $\alpha > 0$, $T > 0$ tal que*
$$\int_t^{+\infty} [f(s)]^{\alpha+1}\, ds \leq T[f(0)]^{\alpha} f(t)\,, \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{6}$$
entonces
$$f(t) \leq f(0) \left[\frac{T + \alpha t}{T + \alpha T} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}\,,\ \forall t \geq T\,. \tag{7}$$

Prueba. Observamos que (7) implica $f(t) \leq f(0)$. Si $f(0) = 0$ entonces $f = 0$. Por otro lado si $f(0) \neq 0$, podemos definir:
$$G(t) = \frac{f(t)}{f(0)}\,.$$
Multiplicando $[f(0)]^{-(\alpha+1)}$ por (6), tenemos $\int_t^{+\infty} [G(s)]^{\alpha+1} ds \leq TG(t)$.

También se tiene que $G(0) = 1$. Luego todo se reduce a probar que $G(t) \leq \left[\frac{T+\alpha t}{T+\alpha T}\right]^{\frac{-1}{\alpha}}$, $\forall t \geq T$.

Esto nos permite asumir $f(0)=1$.
Introducimos la siguiente función

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \to & F(t)=\displaystyle\int_t^{+\infty}[f(s)]^{\alpha+1}ds\,, \end{array}$$

F es no creciente y localmente absolutamente continua. Diferenciando tenemos que $F'(t)=-[f(t)]^{\alpha+1}$ y usando (6) i.e.

$$F(t) \;\leq\; T[f(0)]^{\alpha}f(t) \,\leq\, Tf(t)$$

tenemos

$$\left[\frac{F(t)}{T}\right]^{\alpha+1} \leq [f(t)]^{\alpha+1} = -F'(t)\,.$$

Así hemos demostrado que

$$-F' \geq T^{-\alpha-1}F^{\alpha+1} \text{ en c. t. p. en } (0,\infty)\,.$$

Por otro lado, diferenciando tenemos

$$(F^{-\alpha})' \;=\; -\alpha F^{-\alpha-1}F' \;=\; \alpha F^{-\alpha-1}f^{\alpha+1} \;\geq\; \alpha T^{-(\alpha+1)} \text{ en c.t.p. en } (0,B) \tag{8}$$

donde $B:=\sup\{t\,,\ f(t)>0\}$, y también se observa que $[F(t)]^{-\alpha}$ esta bien definida para $t<B$.

Integrando (8) sobre $[0,s]$ se obtiene

$$[F^{-\alpha}(s)-F^{-\alpha}(0)] \geq \alpha T^{-(\alpha+1)}s \text{ en c.t.p. en } [0,B)$$

i.e.

$$F^{-\alpha}(s) \geq F^{-\alpha}(0)+\alpha T^{-(\alpha+1)}s \text{ en c.t.p. en } [0,B)\,.$$

Es decir,

$$\frac{1}{F^{-\alpha}(0)+\alpha T^{-(\alpha+1)}s} \geq [F(s)]^{\alpha}\,.$$

Por lo tanto,

$$[F^{-\alpha}(0)+\alpha T^{-(\alpha+1)}s]^{-\frac{1}{\alpha}} \geq F(s),\ \text{para cada } s\in[0,B)\,. \tag{9}$$

Desde que $F(s)=0$ si $s\geq B$, tenemos que (9) sucede para $s\in\mathbb{R}$.

De (6) tenemos que $F(0)\leq T$ y el lado izquierdo de (9) esta mayorada por

$$\begin{aligned} [F^{-\alpha}(0)+\alpha T^{-(\alpha+1)}s]^{-\frac{1}{\alpha}} &\leq [T^{-\alpha}+\alpha T^{-(\alpha+1)}s]^{-\frac{1}{\alpha}} \;=\; [T^{-(\alpha+1)}[T+\alpha s]]^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}[T+\alpha s]^{-\frac{1}{\alpha}}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Siendo f no negativo y no creciente, el lado derecho de (9) puede ser estimado,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_s^{+\infty}[f(t)]^{\alpha+1}dt \;\geq\; \int_s^{T+(\alpha+1)s}[f(t)]^{\alpha+1}dt \\ &\geq (T+\alpha s).[f(T+(\alpha+1)s)]^{\alpha+1}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Por transitividad, usando (11) y (10) en (9) obtenemos

$$(T+\alpha s).[f(T+(\alpha+1)s)]^{\alpha+1} \leq T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}[T+\alpha s]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

esto es,

$$[f(T+(\alpha+1)s)]^{\alpha+1} \leq T^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}[T+\alpha s]^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}$$

i.e. $\forall s \geq 0$ se tiene

$$f(T+(\alpha+1)s) \quad \leq \quad T^{\frac{1}{\alpha}}[T+\alpha s]^{-\frac{1}{\alpha}} \;=\; \left(\frac{T+\alpha s}{T}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \;=\; \left(1+\frac{\alpha}{T}s\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\;. \tag{12}$$

Haciendo $t := T+(\alpha+1)s$ tenemos $s = \frac{t-T}{\alpha+1}$ y sustituyendo en (12) obtenemos

$$f(t) \quad \leq \quad \left[1+\frac{\alpha}{T}\cdot\frac{t-T}{\alpha+1}\right]^{-\frac{1}{\alpha}} \;=\; \left[\frac{T+\alpha t}{T+\alpha T}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

para $t \geq T$. $\square$

3. Sistema elástico dinámico y existencia de solución

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ de clase C^1, $\Gamma = \partial\Omega$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ vector normal unitario sobre Γ.
Sea Γ_0, Γ_1 una partición de la frontera Γ tal que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. Las constantes positivas: λ, μ y η, son los parámetros del tensor de elasticidad. Definimos $\gamma := \eta - \lambda - 2\mu$.
Sean $a, l : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^+$ funciones de clase C^1 y supondremos que $a \not\equiv 0$ si $\Gamma_0 = \emptyset$. También, consideramos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no decreciente que se anula en el cero (i.e. $g(0) = 0$) tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq C(1+|x|)$, donde $C > 0$.

Nota 4 *Se observa que $xg(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Consideremos el sistema de evolución $(\mathcal{P})$

$$u_i'' - \mu\Delta u_i - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(div\, u) - \gamma\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ en } \Omega\times\mathbb{R}^+ \tag{13}$$

$$u_i = 0 \text{ en } \Gamma_0\times\mathbb{R}^+ \tag{14}$$

$$\mu\partial_\nu u_i + (\lambda+\mu)(divu)\nu_i + \gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\nu_i + au_i + lg(u_i') = 0 \text{ en } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+ \tag{15}$$

$$u_i(0) = u_i^o \quad u_i'(0) = u_i^1 \text{ en } \Omega \tag{16}$$

para $i = 1, \ldots, N$.
Usando resultados estandares de Teoría de Operadores Maximales Monótonos obtenemos el siguiente resultado de existencia y regularidad de solución.

Teorema 2 *Asumamos: $\eta > \lambda + \mu$.*

1. *Dado $(u^o, u^1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$. El Problema $(\mathcal{P})$ admite una única solución débil*

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^1_{\Gamma_0}(\Omega)^N) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)^N)\,. \tag{17}$$

Además, la aplicación : $(u^o, u^1) \longrightarrow u$ es continua con respecto a dichas topologías; y la energía de u definida por

$$E(t) \quad := \quad \frac{1}{2}\int_\Omega u'^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)[div(u)]^2 + \gamma\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} au^2 \tag{18}$$

es una función no creciente.

2. *Además, si g es globalmente Lipschitziana y si u^o, u^1 verifican la siguiente condición fuerte:*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall i = 1, \ldots, N \\ u^o \in H^2(\Omega)^N \cap H^1_{\Gamma_o}(\Omega)^N\,, \quad u^1 \in H^1_{\Gamma_o}(\Omega)^N \\ \mu\partial_\nu u_i^o + (\lambda+\mu)(divu^o)\nu_i + \gamma\frac{\partial u_i^o}{\partial x_i}\nu_i + au_i^o + lg(u_i^1) = 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

Entonces la solución u del problema $\mathcal{P}$ posee **la propiedad de regularidad mas fuerte**

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega)^N) \tag{20}$$
$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1_{\Gamma_o}(\Omega)^N) \tag{21}$$
$$u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)^N) \tag{22}$$

En este caso u es llamada Solución Fuerte del problema $\mathcal{P}$.

A seguir presentamos algunos cristales cúbicos que verifican la condición $0 < \eta - \lambda - \mu$, hipótesis considerada en el Teorema 2.

	η	λ	2μ	$\gamma = \eta - \lambda - 2\mu$	$0 < \eta - \lambda - \mu$
	c_{xxxx}	c_{xxyy}	c_{xyxy}		
Na	0,055	0,042	0,049	$-0{,}036$	$-0{,}0115$
K	0,046	0,037	0,026	$-0{,}017$	$-0{,}004$
Fe	2,37	1,41	1,16	$-0{,}2$	0,38
$Diamond$	10,76	1,25	5,76	3,75	✓
Al	1,08	0,62	0,28	0,18	✓
LiF	1,19	0,54	0,53	0,12	✓
$NaCl$	0,486	0,127	0,128	0,231	✓
KCl	0,40	0,062	0,062	0,276	✓
$NaBr$	0,33	0,13	0,13	0,07	✓
KI	0,27	0,043	0,042	0,185	✓
$AgCl$	0,60	0,36	0,062	0,178	✓

4. Estabilidad de la energía asociada al sistema

4.1. Tasa exponencial

Sabemos que el Problema $\mathcal{P}$ es disipativo. Supongamos satisfechas las siguientes condiciones:

a) $N \geq 3$

b) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^N$, definimos $m_{x_0} = m(x) := x - x_0,$ tal que

$$m(x) \cdot \nu(x) \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \tag{23}$$
$$m(x) \cdot \nu(x) > 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \tag{24}$$

c) $R := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |m(x)|$

d) λ, μ , η satisfacen la desigualdad:

$$\eta > \lambda + \mu\,, \tag{25}$$

luego $\mu + \gamma > 0$, desde que $\gamma := \eta - \lambda - 2\mu$ y $\mu + \gamma = \eta - \lambda - \mu$.

Nota 5 *El caso homogéneo Isotrópico corresponde a ($\gamma = 0$) $\eta = \lambda + 2\mu$.*

e)

$$\mathcal{E} := \text{ínf}\{\mu\,,\, \mu + \gamma\} = \text{ínf}\{\mu\,,\, \eta - \lambda - \mu\}\,. \tag{26}$$

Por lo tanto $0 < \mathcal{E}$.

f) Sean α, β: $\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ funciones continuas y estrictamente positivas.

Definimos las siguientes funciones: a , l: $\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, mediante:

$$\left.\begin{array}{rcl} a(x) & := & \alpha(x) m(x) \cdot \nu(x) \\ l(x) & := & \beta(x) m(x) \cdot \nu(x) \end{array}\right\} \tag{27}$$

Teorema 3 *Supongamos que se verifican (23), (24) y (25). Si existen las constantes positivas c y c' tal que*

$$c|x| \le |g(x)| \le c'|x|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{28}$$

Nota 6 *Si $g(x) = x$ entonces $c = c' = 1$.*

Entonces, existe $w > 0$ tal que, la solución débil de $(\mathcal{P})$ satisface la siguiente estimativa,
Decaimiento exponencial de la Energía*:*

$$E(t) \le E(0)e^{1-wt}\,,\ \forall t > 0\,. \tag{29}$$

Además*, si definimos a y l de la siguiente forma:*

$$a = \widetilde{a} := \frac{N-1}{2R^2}\,\xi\, m\cdot\nu \text{ y } l = \widetilde{l} := \frac{\sqrt{\xi}}{Rc'} m\cdot\nu\,. \tag{30}$$

Entonces, la energía de la solución débil de (P) satisface:
Decaimiento Exponencial*:*

$$E(t) \le E(0)e^{1-\frac{c\sqrt{\xi}}{c+c'R}t}\,,\ \forall t \ge 0\,. \tag{31}$$

Prueba. Nos basamos en la identidad del Lema 3. Previamente enunciamos el siguiente resultado.

Lema 2

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} l u_i' g(u_i')\, ds\, dt\,,\ \forall\, 0 \le S \le T < +\infty\,. \tag{32}$$

Nota 7 *La igualdad (32) implica que E es absolutamente continua entonces es derivable en casi todo punto y $E'(t) = -\int_{\Gamma_1} l u_i' g(u_i')\, ds$.*

Para simplificar los cálculos, consideremos el vector $M(u) \in \mathbb{R}^N$, que tiene por componentes:

$$M(u)_i = M(u_i) \ := \ 2m_k u_{i,k} + (N-1)u_i = 2\sum_{k=1}^{N}(m_k u_{i,k}) + (N-1)u_i \tag{33}$$

donde $m = (m_1 \ldots, m_N)$.
Para el caso, cuando g satisface (28), basta tomar $p = 1$ en el siguiente resultado.

Lema 3 *Para todo $0 \le S < T < +\infty$ tenemos:*

$$\begin{aligned} 2\int_S^T E(t)^{\frac{p+1}{2}}\,dt &= \frac{p-1}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{p-3}{2}} E' \int_\Omega u' M(u)\,dx\,dt - \left[E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Omega u'\cdot M(u)\,dx\right]_S^T + \\ &\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Gamma (\mu\partial_\nu u_i + (\lambda+\mu) divu\nu_i + \gamma u_{i,i}\nu_i)\cdot M(u_i) + au^2\,ds\,dt + \\ &\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}} \int_\Gamma m\cdot\nu(u'^2 - \mu|\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)(divu)^2 - \gamma u_{i,i}^2)ds\,dt\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Ahora vamos a mayorar la identidad (34), usando las condiciones de frontera sobre Γ_0 y sobre Γ_1. Esto lo conseguimos en los siguientes Lemas.

Lema 4

$$\begin{aligned} J: \ &= \ \int_{\Gamma_0} \underbrace{(\mu\partial_\nu u_i + (\lambda+\mu) divu\nu_i + \gamma u_{i,i}\nu_i)\cdot M(u_i)}_{J_1 :=} + \underbrace{au^2}_{=0}\,ds \\ &+ \int_{\Gamma_0} m\cdot\nu(u'^2 - \mu|\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)(divu)^2 - \gamma u_{i,i}^2)\,ds \ \le \ 0\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Supongamos que g satisface (28) y a y l estan definidas por (30), entonces se obtienen las siguientes estimativas.

Lema 5

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} (\mu \partial_\nu u_i + (\lambda+\mu) divu \nu_i + \gamma u_{i,i}\nu_i) \cdot M(u_i) + \widetilde{a} u^2 \, ds \\ &+ \int_{\Gamma_1} m \cdot \nu (u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)(divu)^2 - \gamma u_{i,i}^2) \, ds \;\leq\; \frac{2R}{\sqrt{\xi}} \frac{c'}{c} \int_{\Gamma_1} \widetilde{l} u_i' g(u_i') \, ds \,. \end{aligned} \tag{36}$$

Lema 6 *Se satisface la siguiente desigualdad:*

$$| \int_\Omega u' \cdot M(u) \, dx | \leq \frac{2R}{\sqrt{\xi}} E(t) \,. \tag{37}$$

Finalmente, usando las estimativas (35), (36) y (37) y eligiendo $p = 1$ en la desigualdad (34) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 \int_S^T E(r) \, dr &\leq \frac{2R}{\sqrt{\xi}} \left(1 + \frac{c'}{c} \right) E(S) + \frac{2R}{\sqrt{\xi}} \left(1 - \frac{c'}{c} \right) E(T) \\ \int_S^\infty E(r) \, dr &\leq \frac{R}{\sqrt{\xi}} \left(1 + \frac{c'}{c} \right) E(S) \,, \quad \forall S \geq 0 \,. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1 obtenemos (31), i.e. $E(S) \leq E(0) e^{1 - \frac{c\sqrt{\xi}}{(c+c')R} S}, \quad \forall S \geq 0 \,.$
Por otro lado, supongamos que g satisface (28) y a y l estan definidas en (27), entonces

Lema 7 *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} (u'^2 - \mu |\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)(div\, u)^2 - \gamma u_{i,i}^2) m \cdot \nu \\ &+ \int_{\Gamma_1} (\mu \partial_\nu u_i + (\lambda+\mu) div\, u\, \nu_i + \gamma u_{i,i}\nu_i) \cdot M(u_i) + a u^2 \;\leq\; C \int_{\Gamma_1} l u_i' g(u_i') + a u_i u_i \,, \end{aligned} \tag{38}$$

$$| \int_\Omega u' \cdot M(u) | \leq C E(t) \,. \tag{39}$$

Utilizando (35), (38) y (39) obtenemos

$$2 \int_S^T E(\tau) d\tau \leq 2C E(S) + C \int_S^T \int_{\Gamma_1} a u^2 \,. \tag{40}$$

El siguiente resultado es una adaptación del método de F. Conrad y B. Rao [2].

Lema 8 *Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ vale*

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} a u^2 ds dt \leq \frac{C}{\epsilon} E(s) + \epsilon \int_S^T E(\tau) \, d\tau \,. \tag{41}$$

En la desigualdad (41) consideramos ϵ suficientemente pequeño de modo que la desigualdad (40), nos conduce a $\int_S^\infty E(\tau) d\tau \leq C_5 E(S)$. Luego por Lema 1, obtenemos (29) , i.e. $E(S) \leq E(0) e^{1 - \frac{1}{C_5} S}$, $\forall S \geq 0$. □

4.2. TASA POLINOMIAL

Teorema 4 *Supongamos que se verifican (23) , (24) , (25) y supongamos que existan las constantes:* $p > 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ *tal que*

$$c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{\frac{1}{p}} \qquad si\ |x| \leq 1 \tag{42}$$

$$c_3|x| \leq |g(x)| \leq c_4|x| \qquad si\ |x| > 1\,. \tag{43}$$

Entonces, dado $(u^0, u^1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^N$ *(i.e. Debido al Teorema 2 existe la solución débil* u *tal que* $u \in C(\mathbb{R}_+, V) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$ *y* $E = \frac{1}{2}\|(u, u')\|^2_{V\times H}$ *es decreciente), la solución de* $(\mathcal{P})$ *satisface la siguiente estimativa,*
Decaimiento Polinomial de la Energía:

$$E(t) \leq Ct^{\frac{-2}{p-1}}\,,\ \forall t > 0 \tag{44}$$

donde C *es una constante que depende de la energía inicial* $E(0)$ *y del modo continuo.*

Prueba. Para el caso g satisfaciendo (42), (43) y a y l definidos por (27), del Lema 3 obtenemos la siguiente estimativa

$$\exists\, C > 0 \text{ tal que } \int_S^{+\infty} E^{\frac{p+1}{2}}(r)dr \leq CE(S)\,. \tag{45}$$

Luego, de (45) y la desigualdad integral no lineal Teorema 1 con $\alpha = \frac{p-1}{2}$, podemos concluir que

$$E(t) \leq C(E(0))t^{\frac{-2}{p-1}}\,,\ \forall t \geq 0\,.$$

□

REFERENCIAS

[1] P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity - Vol. 1: Three-dimensional elasticity*, North-Holland, Amsterdam, (1988).

[2] F. CONRAD AND B. RAO, *Decay of solution of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptot Anal, 7 (1993), pp. 159-177.

[3] L. CORTES-VEGA AND Y. SANTIAGO-AYALA, *About decay of solution of the wave equation with dissipation*, Proyecciones Journal of Mathematics,Vol. 26, Nro. 1,(2007), pp. 37-71.

[4] C.M. DAFERMOS, *Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations in Nonlinear Evolution equations*, M.G. Crandall Ed. Academic Press, New YorK,(1978), pp.103-123.

[5] R. DAUTRY AND J.L.LIONS, *analyse mathematique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques* Tome I, Chapitre 7, Masson Paris, (1988).

[6] R. P. FEYNMAN, LEYTON AND SANDS, *The Feynman' s Lectures on Physics*, Vol 2, chapter 39, Addison Wesley (1964).

[7] V. KOMORNIK, *Exact controllability and stabilization*, RAM : Research in applied mathematics, Masson Paris, (1994).

[8] J.E. LAGNESE, *Boundary stabilization of linear elastodynamic systems*,SIAM J. Control Optim. 21, (1983), pp. 968-984.

[9] J.E. LAGNESE, *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*,Nonlinear Anal. , 16, (1991), pp. 35-54.

[10] J.E.MUÑOZ RIVERA, *Semigrupos e equações diferenciais Parciais*,(2007).

[11] Y. SANTIAGO-AYALA, *Decaimiento exponencial de la solución débil de una ecuación de la Onda no lineal*, Pesquimat - Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VIII, Nro. 2, (2005), pp. 29 - 43.

[12] Y. SANTIAGO-AYALA, *Estabilidad exponencial del Semigrupo* C_0 *asociado a un sistema Termoelástico*, Pesquimat- Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol VII , Nro. 1, (2004), pp. 30-42.