

# MAT

Serie  A

Conferencias, Seminarios  
y Trabajos de Matemática.

ISSN(Print) 1515-4904  
ISSN(Online) 2468-9734

**20**

*VII Italian*

*Latin American*

*Conference on*

*Industrial and*

*Applied Mathematics*

*Second Part*

*Domingo A. Tarzia (Ed.)*

Departamento  
de Matemática,  
Rosario,  
Argentina  
Julio 2015

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



# MAT

## SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 20

### VII ITALIAN - LATIN AMERICAN CONFERENCE ON INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS

Second Part

Domingo A. Tarzia (Ed.)

#### INDICE

**Yolanda Santiago Ayala**, “Sobre la estabilidad de un sistema elástico dinámico en cristales cúbicos”, pp. 1-8.

**Matías Barber - Martín Maas - Francisco Grings - Haydee Karzembraum**, “Un enfoque Bayesiano para la estimación de humedad del suelo a partir de datos SAR polarimétricos en banda L”, pp. 9-16.

**Luis T. Villa - Angélica C. Bouciguez - Ricardo F. Lozano**, “Estrategia de cálculo para la resolución de la primera etapa del proceso de freído por inmersión”, pp. 17-21.

**Rodrigo Castro - Pablo Jacovkis**, “Global models and applied mathematics”, pp. 23-30.

**Adriana C. Briozzo – Domingo A. Tarzia**, “Convergence of the solution of the one-phase Stefan problem with respect two parameters”, pp. 31-38.

Rosario, Julio 2015

## ESTRATEGIA DEL CÁLCULO PARA LA RESOLUCIÓN DE LA PRIMERA ETAPA DEL PROCESO DE FREÍDO POR INMERSIÓN.

Luis T. Villa†, Angélica C. Boucíguez‡ y Ricardo F. Lozano‡

† Investigador CONICET. INIQUI – Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Salta.  
Av. Bolivia 5150 – Salta, Argentina. Tel 0387 –4258617 e-mail: villal@unsa.edu.ar.

‡ Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta. Av. Bolivia 5150 – Salta, Argentina.  
Tel 0387 –4255424. e-mail : acbouciguez@gmail.com; lozanor@unsa.edu.ar.

**Resumen:** El proceso de freído por inmersión profunda involucra la transferencia simultánea de calor y materia, en el que tiene lugar la desorción de humedad y la entrada de aceite a través de la superficie del sólido a freír. En el caso específico de papa natural, la primera etapa del mismo, denominada de burbujeo vigoroso, tiene lugar aproximadamente, entre los 10 y 110 seg de iniciado el mismo. La descripción matemática de tal proceso, resulta expresada mediante un sistema de ecuaciones que involucran ambos fenómenos, los que se encuentran acoplados entre sí. En este trabajo, se presenta una estrategia de cálculo, que permite la resolución del problema antedicho, mediante la introducción de un parámetro oportuno en el modelo descriptivo original, encontrándose la solución para el comportamiento dinámico del frente de desorción de humedad libre. Se comparan los resultados obtenidos mediante este modelo con los provenientes de experiencias realizadas con anterioridad, encontrándose un acuerdo adecuado entre ambos.

**Abstract:** In the immersion frying process, simultaneous heat and mass transfer occur, involving water desorption and oil input through the solid surface subjected to frying. In the specific case of natural potato, the first step during the process named as vigorous bubble, takes place along the time interval 10 – 110 sec. The descriptive model for the process is a mathematical system consisting in an initial - boundary problem associated to the corresponding coupled heat and mass transfer differential equations. In this paper, a calculation strategy, in order to solve the problem, is presented. To this respect, an opportune parameter is introduced in the original model, in order to find the solution for the dynamic behavior for the free – water desorption front. Good agreements emerge for the comparison upon the experimental results.

**Palabras Claves:** freído por inmersión, desorción de humedad, transferencia de calor y materia

**Key – words:** immersion frying, water desorption, heat and mass transfer,

2000 AMS Subjects Classification: 35K20.

### 1. INTRODUCCIÓN

El freído por inmersión profunda de papa natural involucra la transferencia simultánea de calor y materia. El inicio del proceso, consiste en el precalentamiento de la muestra de papa cuya duración es del orden de 10 seg. A continuación, tiene lugar la denominada primera etapa (comprendida aproximadamente entre 10 y 110seg), durante la cual se produce un burbujeo vigoroso, por vaporización del agua libre desorbida en la muestra.

Diversos autores [2], [3], han realizado aportes respecto a la problemática de esta etapa, para lo cual postularon distintas hipótesis en cuanto al planteo del problema. Asimismo, en un artículo previo [5] se han reportado conclusiones interesantes en lo referente al análisis de un modelo matemático consistente en un problema de valor inicial (PVI) y de frontera libre descriptivo del proceso simultáneo de transferencia de calor y materia, que tiene lugar en la primera etapa del freído por inmersión de porciones de papa natural en aceite caliente.

En un trabajo posterior, se resolvió numéricamente el problema mediante un modelo matemático simplificado del original propuesto con anterioridad, lo que permitió transformar el PVI y de frontera libre, en otro de PVI y frontera móvil [6]. Se confrontaron también los resultados obtenidos con datos experimentales disponibles, encontrándose un buen acuerdo.

En la Figura1, se ilustra esquemáticamente el proceso físico que tiene lugar durante dicha etapa del proceso de freído, motivo de los trabajos anteriores y del presente. Se ha trabajado con bastones de papa natural, cortados en forma de prisma.

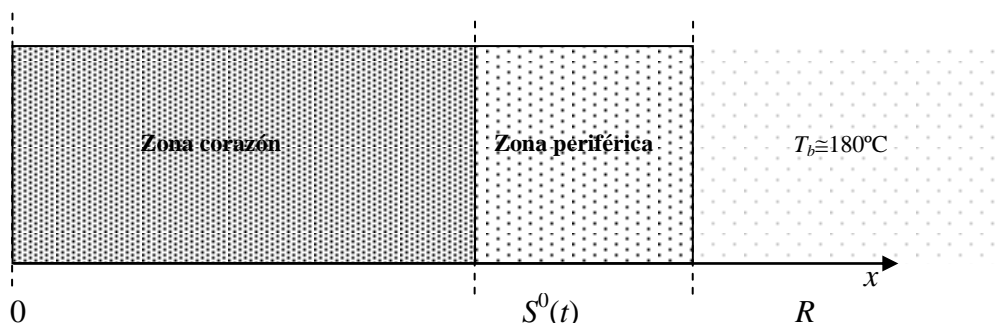


Figura 1: Esquema de la etapa de burbujeo vigoroso del freído ( $t > t_1$ )

En la Figura 1,  $t_1$  denota el tiempo de precalentamiento necesario para llevar la superficie de la porción de papa, a la temperatura de ebullición del agua, este tiempo es de aproximadamente 10 seg;  $R$  el semiespesor del prisma de papa natural sometido a freído,  $T_b$  la temperatura del baño de aceite donde se sumerge la muestra a freír. La función real  $S^0=S^0(t)$ , de la variable independiente  $t$ , da la posición instantánea del frente de desorción de humedad libre de la muestra, para cada  $t>t_1$ . La muestra empieza a desorber en la superficie de contacto  $x=R$ , entre el prisma y el aceite una vez que ha transcurrido el tiempo  $t_1$ , por tanto,  $S^0(t_1)=R$ .

Se ha observado experimentalmente [4] que el frente de desorción de humedad libre alcanza el centro de la porción prismática, en forma simétrica desde ambos laterales, en aproximadamente 110 seg.

## 2. MODELO MATEMÁTICO DESCRIPTIVO DE LA PRIMERA ETAPA

Como se ha señalado en [5] para tal etapa se ha formulado el modelo descriptivo del proceso, el que está sujeto a las siguientes ecuaciones (1) a (11). Ellas modelan la evolución de la temperatura y la concentración, ambos fenómenos acoplados por la ecuación (3). Para resolver la dinámica del frente de desorción de humedad libre no es necesario obtener ni el perfil de concentración, ni el de temperatura, en el dominio de interés ( $S^0(t)\leq x\leq R$ ); en consecuencia tampoco es necesario tener en cuenta el acople entre ambas funciones. Asimismo, la ecuación (4) expresa la condición inicial antes de que comience la etapa de desorción de humedad libre.

$$\rho_s C_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad t > t_1 \quad 0 < x < R \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \quad t > t_1 \quad (2)$$

$$k_s \frac{\partial T}{\partial x}(R, t) - \Delta H \cdot D \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) = h[T_b - T(R, t)] \quad t > t_1 \quad (3)$$

$$T(x, t_1) = Q(x) \quad 0 \leq x \leq R \quad (4)$$

$$C(x, t) = C_0 \quad t > t_1 \quad 0 \leq x \leq S^0(t) \quad (5)$$

$$C(x, t_1) = C_0 \quad 0 \leq x \leq R \quad (6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad t > t_1 \quad S^0(t) \leq x \leq R \quad (7)$$

$$C(S^0(t), t) = C_0 \quad t > t_1 \quad (8)$$

$$-AD \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) = \omega_v \quad t > t_1 \quad (9)$$

$$(C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} = -D \frac{\partial C}{\partial x}(S^0(t), t) \quad t > t_1 \quad (10)$$

$$S^0(t_1) = R \quad (11)$$

donde:  $A$  es el área de la superficie lateral ( $m^2$ );  $C_s$ , la capacidad calorífica efectiva del sólido papa ( $J/kg K$ );  $C, C_0$  y  $C^0$  las concentraciones volumétricas de humedad: libre, inicial libre e inicial total en la papa, respectivamente (todas en  $kg/m^3$ );  $D$  el coeficiente global de difusividad de humedad ( $m^2/s$ );  $k_s$  la conductividad térmica de la papa ( $W/m K$ );  $R$  el semi-espesor de la porción de papa ( $m$ );  $\Delta H$ , el calor de vaporización del agua a  $100^\circ C$  ( $J/kg$ );  $\rho_s$  la densidad de la papa ( $kg/m^3$ );  $h$  el coeficiente convectivo global de transferencia de calor ( $W/m^2 K$ );  $S^0$  la posición del frente de desorción de humedad ( $m$ );  $\omega_v$  la velocidad de vaporización;  $T_b$  la temperatura del baño de aceite y  $t_1=10$ seg, el tiempo en que comienza la etapa de burbujeo.

### 3. FORMULACIÓN DEL PVI PARA EL FRENTE DE DESORCIÓN.

Denominando  $M=M(t)$  al contenido en peso de humedad libre desorbida en el frente de desorción:  $x=S^0(t)$  con sede en la zona periférica, ( $S^0(t) \leq x \leq R$ ), al tiempo  $t$ , se encuentra que está dado por la expresión (12)

$$M(t) = 4L \left[ R \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx + S^0(t) \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \right] \quad (12)$$

Siendo,  $R$  el semiespesor y  $L$  el largo del prisma de papa. Teniendo presente las ecuaciones (5) a (11), a partir de (12) se obtiene

$$\frac{dM(t)}{dt} = 4L \left[ -C_0(R + S^0(t)) + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \right] \frac{dS^0(t)}{dt} \quad (13)$$

La superficie de contacto  $x=R$ , entre el prisma de papa y el aceite caliente, constituye el sumidero de materia por vaporización para  $M(t)$ . Por otra parte, teniendo presente la ecuación (9) y realizando el balance de materia se tienen las ecuaciones (14) a (16)

$$\frac{dM(t)}{dt} = 4LD(R + S^0(t)) \frac{\partial C}{\partial x}(S^0(t), t) - AD \frac{\partial C}{\partial x}(R, t) \quad (14)$$

$$-D \frac{\partial C(S^0(t), t)}{\partial x} = (C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} \quad (15)$$

$$\omega_v(t) = 4R^2L(\rho_s - C^0) \frac{K_x}{60} (X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60) \quad (16)$$

Siendo  $\omega_v(t)$ , la velocidad de vaporización de humedad libre al tiempo  $t$  [3]. Llevando (9) y (15) a (14) se obtiene la ecuación (17)

$$\frac{dM(t)}{dt} = -4L(R + S^0(t))(C^0 - C_0) \frac{dS^0}{dt} - \omega_v(t) \quad (17)$$

Reemplazando la expresión de  $dM/dt$ , dada por (13) y de  $\omega_v(t)$  dada por (16), a partir de (17) resulta la expresión del PVI buscado para la posición del frente de desorción de humedad libre, dada por la ecuación (18)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS^0}{dt} = \frac{-4R^2L(\rho_s - C^0)(K_x/60)(X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60)}{(C^0 - 2C_0)(S^0(t) + R) + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx} \\ \\ S^0(t_1) = R \end{array} \right. \quad (18)$$

Donde  $X_0$ , denota el contenido inicial de humedad en la muestra, el que se obtiene experimentalmente;  $X_e$ , el contenido de humedad cuando se alcanza el equilibrio y  $K_x$  es la constante cinética de velocidad de pérdida de humedad libre. Los coeficientes  $X_e$  y  $K_x$  se toman de lo reportado por [3], para un proceso de freído en condiciones similares.

Introduciendo los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $d$  y  $l$ ; dados por:

$$a = R^2(\rho_s - C^0)b(X_0 - X_e) \quad b = (K_x/60) \quad (19)$$

$$d = (C^0 - 2C_0) \quad l = Rd \quad (20)$$

Remplazando tales parámetros, en el PVI planteado en (18), este resulta expresado por la ecuación (21)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS^0}{dt} = \frac{-a \exp(-bt)}{dS^0(t) + l + \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx} = f(x,t, S^0(t)) \\ \\ S^0(t_1) = R \end{array} \right. \quad (21)$$

Denotando ahora con  $\varphi = \varphi(t)$  a la función definida como:

$$\varphi(t) = \int_{S^0(t)}^R C(x,t) dx \quad (22)$$

De aplicar la regla de Leibniz a (22), asumiendo igualdad de flujos sobre el frente de desorción y el borde externo  $x=L$ , se tiene la expresión (23):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{8LR} 4R^2 L (\rho_s - C^0) (K_x/60) (X_0 - X_e) \exp(-K_x t/60) - C(S^0(t), t) \frac{dS^0}{dt} \quad (23)$$

Entonces de (22) y (23) se deduce el siguiente PVI expresado por (24), que constituye el modelo descriptivo de la dinámica del frente de desorción.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv(t)}{dt} = \left[ -50 + \frac{p}{d(-0.00009t + 0.0009) + v + l} \right] a \exp(-bt) \\ \\ v(0) = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

#### 4. RESOLUCIÓN DEL PVI

Al abordar la resolución numérica de (24) surge el hecho que los rangos de las funciones frente de desorción y la dada por la ecuación (22), en el dominio (0, 110 seg) para la variable independiente tiempo son muy diferentes. En vista de tal situación se procedió a re escalar la función definida oportunamente por (22). Entonces resulta finalmente el siguiente PVI dado por (25) en el que el frente de desorción de humedad libre es la función incógnita de interés principal

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS^0}{dt} = \frac{-a \exp(-bt)}{dS^0(t) + 250u + l} \\ \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{250} \left[ \frac{p}{dS^0(t) + 250u + l} - 50 \right] a \exp(-bt) \\ \\ S^0(10) = 0.01 \quad u(10) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

El PVI dado por (25) se resolvió numéricamente para los siguientes valores de los parámetros  $a = 0.00144$ ;  $b = 0.001$ ;  $d = 436$ ;  $l = 4.7$ ;  $p = 896.6$ ; los que provienen de datos experimentales para el tipo de papa utilizada [1] y los coeficientes de transporte en el proceso de freído [3]. En la Figura 2, se ilustra gráficamente la solución numérica de (25); observándose el buen acuerdo con los valores experimentales obtenidos para el frente de desorción de humedad libre.

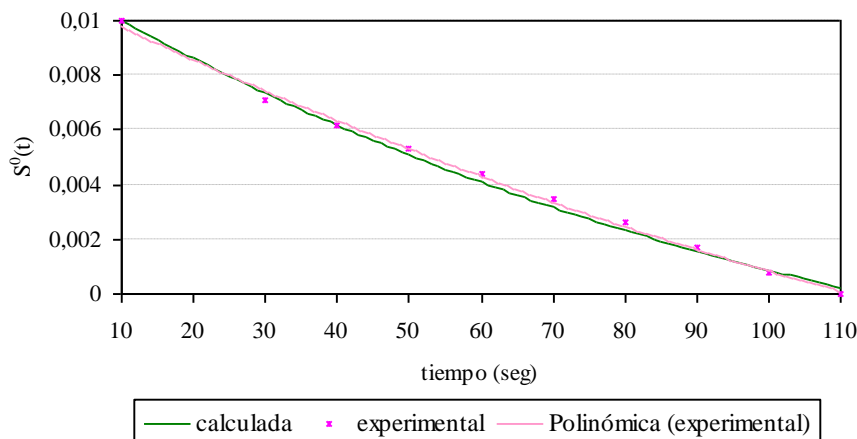


Figura 2: Comparación de la solución numérica y los datos experimentales.

## 5. CONCLUSIONES

Se presenta, en este trabajo, una contribución al campo de conocimiento relativo a la primera etapa (burbujeo vigoroso) del proceso de freído de papa natural por inmersión en aceite caliente. En efecto, tomando como base la formulación del modelo descriptivo para la etapa de interés, provista en trabajos precedentes, se ha logrado precisamente simular la dinámica del frente de desorción de humedad libre, mediante un modelo consistente en un problema de valor inicial para un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales: una para la función frente de desorción propiamente dicho y otra para la función definida como la integral del perfil de concentración de materia (agua libre vaporizada) en la zona en que tiene presencia el vapor de agua libre de la papa.

Para el procesamiento matemático se utilizó el programa *Mathematica*, [7] que presenta un alto nivel de cálculo, resuelve rápidamente y es fácil de implementar. Al poseer rutinas y sub rutinas contenidas en él, se evitan posibles errores de programación, lo que lo hace altamente confiable. Se observa que el acuerdo con los datos experimentales y los calculados es bueno.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se desarrolló en el marco del Proyecto de Investigación N° 1886 del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta, a quien se agradece su financiamiento.

## REFERENCES

- [1] J. AGUILERA, *Temas en Tecnología de Alimentos*, Vol. 1, Coedición: Alfa omega, IPN, CYTED, 2002
- [2] B. FARKAS, R. SINGH Y T. RUMSEY, *Modeling heat and Mass Transfer in Immersion Frying. I. Model Development. II, Model Solution and Verification*. Journal of Food Engineering **29**, 211 – 248, 1996
- [3] M.KROKIDA, V. OREOPOULOW Y Z. MAROULIS, *Water Loss and Oil Uptake as a Function of Frying Time*. Journal of Food Engineering **44**, 39 – 46, 2000.
- [4] L. VILLA, *Estudio del Freído de Papas por Inmersión Mediante un Modelo de Frontera Libre. Tesis Doctoral*, Doctorado en Ciencias – Area Química, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, 2006
- [5] L. VILLA, J. GOTTIFREDI Y A. BOUCÍGUEZ, *Some Considerations on a Simultaneous Heat and Mass Transfer Food Process. Model Formulation*. International Review of Chemical Engineering. Vol. 3, N°. 2, 265-271, 2011
- [6] L. VILLA, C. SANZIEL Y A. BOUCÍGUEZ, *Numerical Solution and Validation Concerning a Descriptive Model of a Simultaneous Heat and Mass Transfer Process*. International Review of Chemical Engineering Vol. 3, N°. 4, 493-498, 2011.
- [7] S. WOLFRAM, *S. Mathematica 8, Version Number 8.0.4.0*. Wolfram Research Inc. © 2011.